

Bemerkungen zur Stabilität eines physikalischen Pendels Zweite Mitteilung

Von Wolfhart Haacke in Braunschweig

In dieser zweiten Mitteilung werden die Stabilisierungsphänomene des physikalischen Pendels bei beliebiger periodischer ebenen Bewegung des Aufhängepunktes untersucht, falls die Schwerkraft in dieser Bewegungsebene liegt. Bei Benutzung der Theorie der Mathieuschen Differentialgleichung, besonders der Struttischen Parameterkarte, kann systematisch und mit geringem Rechenaufwand entschieden werden, welche stabilen und labilen Lagen das Pendel einnehmen kann. Ausführlich werden die harmonische elliptische Oszillation und ihre Spezialfälle diskutiert.

In this second communication, the phenomena of stabilizing a physical pendulum are investigated, if the point of suspension is moving periodically, in an arbitrary manner, in a plane that contains the direction of gravity. The theory of the Mathieu differential equation, especially Strutt's parameter chart permit to discern, systematically and with little computation work, the stable and unstable positions of the pendulum. The harmonic elliptical oscillation and its special cases are discussed in detail.

Dans cette deuxième communication on examine les phénomènes de stabilisation d'un pendule physique, dont le point de suspension subit un mouvement plan périodique arbitraire, dans le cas, que la direction de la gravitation est située dans le plan de ce mouvement. En employant la théorie de l'équation différentielle de Mathieu et particulièrement la carte paramétrique de Strutt, on peut déterminer systématiquement et sans grande peine calculatoire les positions stables et labiles du pendule. L'oscillation harmonique elliptique et ses cas particuliers sont discutés en détail.

В этом втором сообщении исследуются явления стабилизации физического маятника при любом периодическом плоском движении точки подвеса, если направление силы тяжести лежит в этой плоскости движения. Используя теорию дифференциального уравнения Маттье, в особенности карту параметров Струтта, можно систематически и путем простых вычислений решить вопрос, какие устойчивые и неустойчивые положения могут быть заняты маятником. Подробно исследуется гармоническое эллиптическое колебание и его частные случаи.

1. Einführung

In einer früheren Untersuchung unter dem gleichen Titel wurden die Stabilisierungsphänomene eines physikalischen Pendels bei vertikaler harmonischer Erschütterung des Aufhängepunktes untersucht [1]¹⁾. Nun soll die Fragestellung verallgemeinert und beliebige ebene periodische Oszillationen des Aufhängepunktes zugelassen werden. Allerdings wird verlangt, daß der Vektor der Schwerkraft in der Oszillationsebene liegt. Wird durch die Bewegung des Aufhängepunktes und die Schwerkraftichtung eine Ebene eindeutig bestimmt, so stellt sich aus Symmetriegründen ein räumliches Pendel in diese Ebene ein und schwingt als ebenes Pendel. Diese Eindeutigkeit besteht in jedem Fall außer dem der vertikalen Erschütterung. Untersuchungen über dieses Problem sind schon von Hirsch [2], Erdélyi [3] und Klotter [4] durchgeführt worden. In der vorliegenden Arbeit wird mit Hilfe der Theorie der Mathieuschen Differentialgleichung das Pendelproblem neben einigen neuen Ergebnissen systematischer und mit geringerem Rechenaufwand gelöst. Dadurch kann man auf einen Teil der früher benötigten Vernachlässigungen verzichten und die Auswirkungen der übrigen besser beurteilen. Teilweise ist in den früheren Arbeiten von einer periodischen Bewegung des Aufhängepunktes gesprochen und ihre Frequenz berechnet worden. Aus den folgenden Betrachtungen wird sich ergeben, daß eine fastperiodische, aber nicht periodische Bewegung Voraussetzung für eine Stabilisierung ist.

Bezüglich der Sätze aus der Theorie der Mathieuschen Differentialgleichung und die Auswertungsmethode der Struttischen Karte schließen wir unmittelbar an [1] an.

2. Die Bewegungsgleichung

Wir betrachten ein physikalisches Pendel mit der Masse m , das um einen Aufhängepunkt A in einer x, y -Ebene schwingen kann. Dieser Aufhängepunkt werde periodisch in dieser Ebene erschüttert. Dabei seien die Erschütterungsamplituden in der x - und in der y -Richtung klein gegen

¹⁾ [] bezieht sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Dabei sind α_1 und α_2 Integrationskonstanten, $f(u) = f(u + 2\pi)$ und μ reell, doch $\mu \neq \frac{k}{2}$ ($k=0, 1, \dots$), da wir nur stabile Bewegungen betrachten, bei denen φ klein bleibt. Bei dieser Einschränkung für μ existiert eine in 2π periodische Partikularlösung von (4) ([6] S. 145). Doch kleine Schwingungen um eine Mittellage ergeben sich höchstens dann, wenn

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi(\tau) d\tau \quad \text{oder} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \varphi(\tau) d\tau = 0$$

erfüllt ist. Es gilt

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \varphi_h(\tau) d\tau = 0 \quad \dots \dots \dots [1].$$

Da die Partikularlösung φ_p in 2π periodisch ist, folgt aus

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \varphi(\tau) d\tau = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} \int_0^u \varphi_p(\tau) d\tau = 0$$

$c_0 = 0$, wenn man $\varphi_p(u)$ in ihre Fourierreihe

$$\varphi_p(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{i\nu u} \quad \dots \dots \dots (6)$$

entwickelt. Dies ist die notwendige Bedingung für das Auftreten kleiner Schwingungen. Aus $c_0 = 0$, werden die „möglichen Mittellagen“ α bestimmt. Dann geht man mit dem nun bekannten α in die homogene Gl. (4)_h ein und diskutiert die „Stabilität“ ihres Fundamentalsystems in Abhängigkeit von a , b , n und ω an Hand der Struttischen Karte (Figur 2 in [1]). Im allgemeinen sollen a , b und ω vorgegeben und die Erschütterungsfrequenzen bestimmt werden, für die sich Stabilität ergibt³⁾.

Setzt man (6) in (4) ein, so erhält man ein unendliches Gleichungssystem für die c_ν :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} c_1 + \lambda c_0 + \frac{\gamma}{2} c_{-1} &= \sigma \\ \frac{\gamma}{2(\lambda-1)} c_{\pm 2} + c_{\pm 1} + \frac{\gamma}{2(\lambda-1)} c_0 &= \frac{\varrho}{2} \frac{e^{\pm i\kappa}}{\lambda-1} \\ c_\nu + \frac{\gamma}{2(\lambda-\nu^2)} (c_{\nu-1} + c_{\nu+1}) &= 0 \quad \text{für} \quad |\nu| > 1. \end{aligned}$$

Die Koeffizientendeterminante C konvergiert dann nach der Kochschen Theorie [7]. B sei die Determinante, die sich aus C ergibt, wenn man die nullte Spalte durch die rechte Seite ersetzt:

$$B = \begin{vmatrix} \frac{\gamma}{2(\lambda-4)} & 1 & \frac{\gamma}{2(\lambda-4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{2(\lambda-1)} & 1 & \frac{\varrho}{2} \frac{e^{i\kappa}}{\lambda-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma}{2} & \sigma & \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\varrho}{2} \frac{e^{-i\kappa}}{\lambda-1} & 1 & \frac{\gamma}{2(\lambda-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma}{2(\lambda-4)} & 1 & \frac{\gamma}{2(\lambda-4)} \end{vmatrix}$$

³⁾ Im Anschluß an [4] sollen die Wurzeln α , die zu instabilen Punkten der Struttischen Karte führen, labile Lagen des Pendels heißen.

Nach Koch konvergiert B ebenfalls und es ist $c_0 = \frac{B}{C}$. Falls (6) überhaupt existiert, folgt aus $c_0 = 0$ auch $B = 0$. Im Ausnahmefall liegen weder stabile noch labile Lagen vor. Es ist nun

$$B = \sigma - \frac{\gamma^2}{4} \sigma \left[\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \nu^2} \frac{1}{\lambda - (\nu+1)^2} - \frac{2}{\lambda(\lambda-1)} \right] - \frac{\varrho \gamma \cos \alpha}{2 \lambda - 1} + O(\gamma^4).$$

In der eckigen Klammer steht eine für $\lambda = 0$ reguläre Funktion. γ und ϱ haben dieselbe Größenordnung. Über λ wollen wir nur voraussetzen, daß $|\lambda| < 1$ ist, d. h. $n^2 l > 25 \text{ cm/sec}^2$. Bei einem Zylinderstabpendel von 25 cm etwa könnte n dann bis zu 1 Hz herunter betrachtet werden. Es gilt

$$\pi \cot \pi z = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z + \nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - \nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z + \nu + 1} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - \nu - 1}.$$

Also ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda - \nu^2} \frac{1}{\lambda - (\nu+1)^2} \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(2\sqrt{\lambda}-1)} + \frac{-1}{2\sqrt{\lambda}(2\sqrt{\lambda}+1)} + \frac{-1}{2\sqrt{\lambda}(2\sqrt{\lambda}+1)} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}(2\sqrt{\lambda}-1)} \right\} = -\frac{2\pi \cot \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}(1-4\lambda)}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$B = \sigma + \frac{\gamma^2}{2} \sigma \left[\frac{\pi \cot \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}(1-4\lambda)} - \frac{1}{\lambda(1-\lambda)} \right] + \frac{\varrho \gamma \cos \alpha}{2(1-\lambda)} + O(\gamma^4). \quad z(\lambda) = \frac{\pi \cot \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}(1-4\lambda)} - \frac{1}{\lambda(1-\lambda)}$$

ist für $|\lambda| < 1$ analytisch. Also bis auf $O(\gamma^4)$:

$$\begin{aligned} h \sin \alpha \left\{ 1 + \frac{1}{2} [a^2 \cos^2(\alpha - \omega) + b^2 \sin^2(\alpha - \omega)] \left[\frac{1}{h \cos \alpha (1 + h \cos \alpha)} - \frac{\pi \operatorname{Cotg}(\pi \sqrt{h \cos \alpha})}{\sqrt{h \cos \alpha} (1 + 4h \cos \alpha)} \right] \right\} \\ = \frac{e^2 \sin 2(\alpha - \omega)}{4(1 + h \cos \alpha)} \dots \dots \dots (7). \end{aligned}$$

Die Erfüllungtheit von (7) ist eine notwendige Bedingung dafür, daß in der Richtung α Stabilität herrscht. (7) soll die Stabilitätsbedingung genannt werden.

4. Diskussion der Stabilitätsbedingung

Im allgemeinen wird man sich auf größere Erschütterungsfrequenzen beschränken, so daß man neben h , a^2 und b^2 die Größen ha^2 und hb^2 vernachlässigen kann. Dann können wir auch $1 + h \cos \alpha \approx 1$ setzen. Wenn man n nicht in dieser Form einschränken will, muß man auf (7) zurückgreifen. Es ist zu beachten, daß z als Funktion von λ für $|\lambda| \leq 0,8$ dem Betrage nach unterhalb 1,5 bleibt. Es ist $z(0) \approx -0,3$. Mit wachsendem λ strebt z monoton gegen Null. Für $\lambda < 0$ oszilliert z zunächst, doch strebt z bei $\lambda \rightarrow -1$ über alle Grenzen. Man wird im allgemeinen (7) mit Hilfe eines Iterationsverfahrens lösen müssen. — Da nun z für $|\lambda| < 0,8$ in der Größenordnung 1 bleibt, vereinfacht sich (7) bei den gegebenen Vernachlässigungen zu

$$4 h \sin \alpha = e^2 \sin 2(\alpha - \omega) \dots \dots \dots (8).$$

Da $h > 0$ und $e^2 \geq 0$ ist, kann es wegen der Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen höchstens in folgenden Sektoren Mittellagen geben: Im Intervall $0 \leq \alpha \leq \pi$ kommt nur $\omega \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} + \omega$ und in $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ nur $\pi \leq \alpha \leq \pi + \omega$ und $\frac{3\pi}{2} + \omega \leq \alpha \leq 2\pi$ in Frage (Abb. 2).

Im Falle zirkularer Oszillation ist

$$\xi = a \cos u \quad \text{und} \quad \eta = a \sin u.$$

Dann wird

$$\lambda = -h \cos \alpha, \quad \gamma = a \dots \dots \dots (5a).$$

Aus (8) erhalten wir

$$\sin \alpha = 0. \quad \text{Für } \alpha = 0 \text{ ist } \lambda = -h, \gamma = a \text{ und für } \alpha = \pi \text{ ist } \lambda = h, \gamma = a \quad (8a).$$

Da h und a klein sind, ist bei zirkularer Oszillation die natürliche Gleichgewichtslage stabil, da die Umgebung des Nullpunktes der Struttschen Karte im ersten Quadranten einen stabilen

Bereich darstellt. Die obere Gleichgewichtslage $\alpha = 0$ ist für $n > n_0 = \frac{\sqrt{2gl}}{2\pi al}$ stabil [1]. Da-

bei ist a der durch die reduzierte Pendellänge l dividierte Radius des Oszillationskreises. Der Vergleich mit [1] ergibt, daß für große n und kleine a die Stabilisierung durch vertikale Erschütterung und durch zirkulare Oszillation dieselben Phänomene hervorbringt. Schränken wir h nicht ein, so müssen wir auf (7) zurückgreifen. Wir erhalten wieder $\sin \alpha = 0$. Die Diskussion für beliebige $h < 1$ wird wie bei der vertikalen Erschütterung durchgeführt [1]. Doch daneben

tritt jetzt noch die Gleichung $1 + \frac{a^2}{2} z = 0$ auf.

Da $|z|$ für $|\lambda| \leq 0,8$ unterhalb 1,5 bleibt, kann diese Gleichung bei unseren Voraussetzungen über a keine weiteren Wurzeln ergeben. — Nun wollen wir eine lineare Erschütterung in der Richtung ω betrachten. Aus (8) erhalten wir jetzt

$$4h \sin \alpha = a^2 \sin 2(\alpha - \omega) \quad (8b).$$

Daraus ergibt sich folgender Satz: Das Stabilisierungsphänomen eines durch elliptische Oszillation des Aufhängepunktes erschütterten Pendels läßt sich immer auch durch eine lineare Erschütterung erreichen, falls die Oszillationsfrequenz hinreichend groß und die Ellipsenachsen gegen die reduzierten Pendellängen hinreichend klein sind. Diese lineare Erschütterung muß in Richtung der großen Ellipsenachse erfolgen und als Amplitude die lineare Exzentrizität der Ellipse haben. — Der Spezialfall dieses Satzes für zirkulare Oszillation ist schon oben gesondert behandelt worden. Dieses Ergebnis hat bereits Erdélyi ausgesprochen [3]. Doch scheint der hier benutzte Weg zu seiner Ableitung wesentlich kürzer zu sein. Die Abb. 2 hat für den Fall der linearen Erschütterung schon Klotter angegeben [4]. Die Unterschiede zwischen den Phänomenen, die durch elliptische und durch lineare Oszillation erzeugt werden, ergeben sich erst, wenn wir n kleiner werden lassen, wie ein Vergleich von (7) mit der aus (7) durch $b = 0$ entstehenden Gleichung zeigt. Die Unterschiede sind also von höherer Ordnung klein. Eine graphische Darstellung von (8b) in einer $\left(\frac{2h}{a^2}\right)$, α -Ebene mit ω als Parameter hat Klotter angegeben [4]. Sie soll hier nicht wiederholt werden. Die Entscheidung, ob ein in dieser Ebene gefundener Parameter zu einer stabilen oder labilen Lage gehört, fällt man mit Hilfe der Struttschen Karte [1]. Bei linearer Erschütterung ist

$$\lambda = -h \cos \alpha, \quad |\gamma| = a |\cos (\alpha - \omega)| \quad (5b).$$

Ist $\lambda > 0$, also $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{2}$, und α zugleich Wurzel von (8b), so ergibt die Struttsche Karte, daß diese Parameter für hinreichend kleine h und a sicher zu stabilen Lösungen Anlaß geben. Für kleine a und große n gibt es also in den beiden unteren Quadranten keine labilen Lagen.

Wie die Struttsche Karte zeigt, gilt dies nicht mehr für kleine n . Für $n^2 > \frac{g}{\pi^2 l (1-2a)}$ ergibt sich sicher noch Stabilität, wie man mit Hilfe einer Abschätzung der Grenzkurve ce_1 zeigen kann [1].

Ist $\lambda < 0$, also $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq +\frac{\pi}{2}$, so ist $|\lambda| < \frac{\gamma^2}{2}$ für Stabilität notwendig. Setzt man in diese Bedingung (5b) und (8b) ein, so erhält man

$$\frac{2h}{a^2} = \frac{g}{2\pi^2 n^2 a^2 l} < \cos (\alpha - \omega) \quad (9).$$

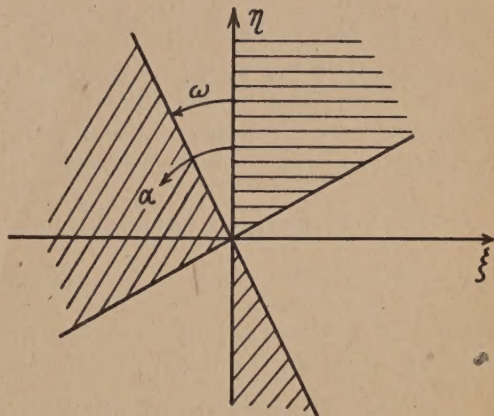


Bild 2

Dies ist die hinreichende Bedingung für die Stabilität in den oberen Quadranten, nachdem α durch (8b) bestimmt ist.

Nach Abb. 2 ist dann nur $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha - \omega \leq -\omega$ und $0 \leq \alpha - \omega \leq \frac{\pi}{2} - \omega$ möglich; daher ist in (7) kein Absolutzeichen bei $\cos(\alpha - \omega)$ notwendig. Man könnte annehmen, daß die Gleichgewichtslagen von der Drehrichtung der elliptischen Oszillation abhängen. Doch (8) zeigt, daß dies nicht der Fall ist.

Setzt man $\omega = 0$, so ergibt sich die in [1] ausführlich behandelte vertikale Erschütterung. Ergänzend dazu soll nur noch gesagt werden, daß sich aus (8b) dann neben $\sin \alpha = 0$ noch $\cos \alpha = \frac{2h}{a^2}$ ergibt. Doch (9) zeigt, daß es sich dabei um zwei zur Vertikalen symmetrische labile Lagen handelt. Die Parameterwerte liegen auf einer Grenzkurve der Struttschen Karte, die ja noch zum labilen Bereich gehört. Mit fallenden n schieben sich diese Lagen immer näher an die stabile Lage $\alpha = 0$; beim Zusammenfallen (kritische Frequenz) dieser beiden Richtungen mit der vertikalen stabilen Lage wird diese nun labil.

Bei horizontaler Erschütterung ($\omega = \frac{\pi}{2}$) ist

$$\sin \alpha (2h + a^2 \cos \alpha) = 0 \quad \dots \dots \dots (8c).$$

Ist $\alpha = 0$, so finden wir $\lambda = -h$, $\gamma = 0$; ist $\alpha = \pi$, so ist $\lambda = h$ und $\gamma = 0$. (4)_h ist jetzt eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die Lage $\alpha = 0$ ist daher labil, die Lage $\alpha = \pi$ stabil. (Hier ist Hirsch [2] ein Irrtum unterlaufen.) Ist $\cos \alpha = -\frac{2h}{a^2}$, so ist $\lambda = \frac{2h^2}{a^2}$ und $|\gamma| = a |\sin \alpha|$. Wegen der Grenzkurve ce_1 muß bei Stabilität $\lambda < \frac{1}{4} - \frac{|\gamma|^2}{g^2}$ sein. Also herrscht sicher Stabilität für $n^4 > \frac{2\pi^4 l^2 a^2 (1 - 2a)}{g^2}$. Dies sind dann zwei zur natürlichen Gleichgewichtslage $\alpha = \pi$ symmetrische stabile Lagen in den unteren Quadranten.

5. Nichtharmonische Oszillation des Aufhängepunktes

Zum Schluß soll noch kurz der Fall der nichtharmonischen Oszillation des Aufhängepunktes betrachtet werden. Wir gehen von Gleichung (3) aus, die noch allgemein gilt. Sie ist jetzt eine allgemeine inhomogene Hillsche Differentialgleichung. Das Floquetsche Theorem gilt auch jetzt. Die Struttsche Karte ist jetzt je nach der Koeffizientenfunktion verschieden. Für einige Funktionen, z. B. Treppenfunktion [8] und $f(u) = \lambda + \gamma_1 \cos u + \gamma_2 \cos 2u$ [9] sind die Grenzkurven der Parameterebene diskutiert. Weitere findet man in der umfangreichen Literatur über die Hillsche Differentialgleichung verstreut ([5] Literaturverzeichnis). Die Existenz der periodischen Partikularlösung [6] gilt ebenfalls ungeändert. Entscheidungen über $\mu = \frac{k}{2}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) müssen für jede Koeffizientenfunktion gesondert durchgeführt werden. Sonst ist die oben angegebene Methode im vollen Umfang anwendbar.

Literaturverzeichnis

- [1] H a a c k e: Bemerkungen zur Stabilisierung eines physikalischen Pendels. Z. angew. Math. Mech. 31 (1951) S. 161—169.
- [2] H i r s c h: Das Pendel mit oszillierendem Aufhängepunkt. Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), S. 41—52.
- [3] E r d é l y i: Über kleine Schwingungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt, II. Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 171—182.
- [4] K l o t t e r - K o t o w s k i: Über die Stabilität der Bewegungen eines Pendels mit oszillierendem Aufhängepunkt. Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), S. 289—296.
- [5] M e L a c h l a n: Theory and application of Mathieu functions. Oxford 1947, 400 S.
- [6] S c h m e i d l e r: Vorträge über Determinanten und Matrizen. Berlin 1949, 155 S.
- [7] H. v. K o c h: Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires. Acta Math. 16 (1892), S. 217—295 (§§ 1—2).
- [8] S t r u t t: Stabiliseering en labiliseering door trillingen. Physica 7 (1927), S. 265—271.
- [9] K l o t t e r - K o t o w s k i: Über die Stabilität der Lösungen Hillscher Differentialgleichungen mit drei unabhängigen Parametern. Z. angew. Math. Mech. 23 (1943), S. 149—155.

Eingegangen am 7. Oktober 1950.

Elementare Lösungen der Wellengleichung isentropischer Gasströmungen

Herrn Joseph Lense zum 60. Geburtstag am 28. 10. 1950 gewidmet

von Robert Sauer in München

Die Wellengleichung der eindimensionalen nichtstationären isentropischen Strömungen idealer Gase läßt sich bekanntlich lösen mit Hilfe einer hypergeometrischen Funktion als Riemannsche Funktion; im Falle n -atomiger Gase sind die Lösungen durch elementare Funktionen gegeben. Es wird gezeigt, daß dieselben Lösungen auch für Gase mit allgemeinerer Adiabaten Gleichung gelten und daß man analoge Ergebnisse auch für die Wellengleichung der zweidimensionalen stationären isentropischen Strömungen erhält.

The wave equation of one-dimensional unsteady isentropic flow of ideal gases can be solved, as it is well known, by means of a hypergeometric function as Riemann function; in the case of n -atomic gases, the solutions are given by elementary functions. In this paper it is shown that the same solutions hold for gases obeying more general adiabatic laws and, furthermore, that one obtains analogous results for the wave equation of two-dimensional steady isentropic flow.

L'équation d'ondes des écoulements non stationnaires isentropiques à une dimension des gaz idéaux est résolue, comme il est bien connu, à l'aide d'une fonction hypergéométrique comme fonction de Riemann; dans le cas des gaz à n atomes, il existe des solutions représentées par des fonctions élémentaires. Il est démontré, dans la note présente, que les mêmes solutions sont valables aussi dans le cas de gaz obéissant à des lois d'adiabate plus générales, et qu'on obtient des résultats analogues pour l'équation d'ondes des écoulements stationnaires isentropique à deux dimensions.

Волновое уравнение одномерного нестационарного изентропического потока идеального газа может быть, как известно, решено при помощи гипергеометрических функций как функция Римана. В случае n -атомного газа решения представляются элементарными функциями. В этой работе показывается, что для газов, подчиняющихся более общему закону адиабаты, действительны те же самые решения, а что в случае волнового уравнения двумерного стационарного изентропического потока получаются аналогичные результаты.

§ 1. Einleitung

Die Wellengleichung für die eindimensionalen nichtstationären isentropischen Strömungen idealer Gase mit der Druck-Dichte-Beziehung $p = \text{const. } \rho^\kappa$ läßt sich bekanntlich¹⁾ in den Spezialfällen $\kappa = \frac{2n+3}{2n+1}$ ($n = -1, 0, 1, 2, \dots$) explizit lösen. Im folgenden wird gezeigt, daß die expliziten Lösungen nicht nur für die idealen Gase sondern auch für hypothetische Gase mit allgemeineren Druck-Dichte-Beziehungen gelten (§ 2) und daß sich analoge explizite Lösungen auch für die Wellengleichung der zweidimensionalen stationären isentropischen Strömungen gewisser hypothetischer Gase angeben lassen (§ 3).

Anschließend werden die Sonderfälle $n = 0$ und $n = -1$ diskutiert, wobei auch auf die praktische Anwendung dieser Fälle zur Approximation von Strömungen realer Gase mit beliebiger Druck-Dichte-Beziehung eingegangen wird (§ 4). Zum Schluß wird auf Zusammenhänge mit der Theorie der Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken hingewiesen (§ 5).

§ 2. Nichtstationäre eindimensionale Strömungen

Bei der eindimensionalen nichtstationären isentropischen Strömung eines Gases mit der Druck-Dichte-Beziehung $p = p(\rho)$ und der dadurch bestimmten Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ läßt sich ein Strömungspotential $f(\lambda, \mu)$ einführen²⁾ als Funktion der charakteristischen Zustandsvariablen

$$\left. \begin{matrix} 2\lambda \\ 2\mu \end{matrix} \right\} = \pm u + A \quad \text{mit} \quad A = \int \frac{dp}{a\rho} \dots \dots \dots (1).$$

u bedeutet hierbei die Gasgeschwindigkeit und es wird vorausgesetzt, daß A nicht konstant, also a eine Funktion $a(A)$ ist. Durch Auflösung von (1) ergibt sich

$$u = \lambda - \mu, \quad A = \lambda + \mu, \quad \text{also} \quad a = a(\lambda + \mu).$$

Nach Ermittlung des Strömungspotentials $f(\lambda, \mu)$ ist der Strömungsverlauf ($x = \text{Ortskoordinate}$, $t = \text{Zeit}$) durch

$$2x = \frac{a-u}{a} f_\lambda - \frac{a+u}{a} f_\mu, \quad 2t = -\frac{1}{a} (f_\lambda + f_\mu) \dots \dots \dots (2)$$

vollständig festgelegt²⁾.

¹⁾ I. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes. Paris 1903, S. 163, 168. — G. Darboux, Théorie des surfaces, II. Paris 1915, S. 65. — Love und Pidduek, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A 222, 1922, S. 167—226.

²⁾ Vgl. z. B. R. Sauer, Théorie des écoulements des fluides compressibles. Verlag Béranger, Paris 1951.

Das Strömungspotential genügt der Wellengleichung

$$f_{\lambda\mu} + \frac{1-a'}{2a} (f_\lambda + f_\mu) = 0 \quad \dots \dots \dots (3),$$

wobei der Strich die Ableitung der durch die Druck-Dichte-Beziehung $p(\varrho)$ gegebenen Funktion $a(\lambda + \mu)$ nach $\lambda + \mu$ bedeutet.

Ein Spezialfall der Wellengleichung (3) ist die Darbouxssche Differentialgleichung

$$f_{\lambda\mu} + \frac{n}{\lambda + \mu} (f_\lambda + f_\mu) = 0 \quad \dots \dots \dots (4)$$

mit $n = -1, 0, 1, 2, \dots$. Diese besitzt die expliziten Lösungen¹⁾²⁾

$$\left. \begin{aligned} f &= L(\lambda) + M(\mu) && \text{für } n = 0 \\ f &= L(\lambda) + M(\mu) - \frac{\lambda + \mu}{2} [L'(\lambda) + M'(\mu)] && \text{für } n = -1 \\ f &= \frac{\partial^{2n-2}}{\partial \lambda^{n-1} \partial \mu^{n-1}} \left[\frac{L(\lambda) + M(\mu)}{\lambda + \mu} \right] && \text{für } n = 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

mit den hinreichend oft differenzierbaren, sonst aber willkürlichen Funktionen $L(\lambda)$, $M(\mu)$.

Wir fragen nun nach den allgemeinsten Druck-Dichte-Beziehungen $p(\varrho)$, für welche die Wellengleichung (3) sich zur Darbouxsschen Gl. (4) spezialisiert, d. h. nach denjenigen Gasen, deren eindimensionale nichtstationäre Strömungen durch die Gl. (5) explizit gegeben sind.

Die gesuchten Druck-Dichte-Beziehungen ergeben sich aus der Bedingung

$$\frac{1-a'}{2a} = \frac{n}{\lambda + \mu}.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$a = \frac{A}{1+2n} + CA^{-2n} \quad \dots \dots \dots (6)$$

mit der Integrationskonstanten C .

Um die durch Gl. (6) festgelegten Druck-Dichte-Beziehungen zu finden, stellen wir die Dichte ϱ und den Druck p ebenfalls als Funktionen von A dar. Aus

$$dA = \frac{dp}{a\varrho} = \frac{dp}{d\varrho} \frac{d\varrho}{a\varrho} = \frac{a}{\varrho} \frac{d\varrho}{a\varrho}$$

erhält man

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dA}{a} = \frac{A^{2n} dA}{C + \frac{1}{1+2n} A^{2n+1}},$$

also

$$\varrho = \bar{C} \left(C + \frac{1}{1+2n} A^{1+2n} \right) \quad \text{mit} \quad \bar{C} = \text{const.} \neq 0 \quad \dots (7).$$

Hiernach liefert

$$dp = a^2 d\varrho = \bar{C} \left(CA^{-n} + \frac{A^{1+n}}{1+2n} \right)^2 dA$$

sofort

$$p = p_0 + \bar{C} \left[\frac{A^{2n+3}}{(1+2n)^2 (2n+3)} + \frac{C}{1+2n} A^2 + \frac{C^2}{1-2n} A^{-2n+1} \right] \quad \dots \dots \dots (8).$$

Durch Elimination von A aus den Gl. (7) und (8) folgt schließlich die gesuchte Druck-Dichte-Beziehung

$$\left. \begin{aligned} p &= p_0 + \bar{C} \left[\frac{\varrho^{**}}{(1+2n)^2 (2n+3)} + \frac{C}{1+2n} \varrho^{**-1} + \frac{C^2}{1-2n} \varrho^{**n-2} \right] \\ \text{mit} \quad \kappa &= \frac{2n+3}{2n+1}, \quad \varrho^* = (1+2n) \left(\frac{\varrho}{\bar{C}} - C \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9).$$

Für $C = 0$ stellt Gl. (9) im wesentlichen die Druck-Dichte-Beziehung der idealen Gase dar, für $C \neq 0$ und $n \neq 0$ liegt eine allgemeinere, von 3 Parametern C , \bar{C} und p_0 abhängige Druck-

Dichte-Beziehung vor, für welche dieselbe Wellengleichung (4) mit demselben Lösungen (5) wie bei den idealen Gasen gilt.

Zusatzbemerkung: Für nicht ganzzahlige Werte von n hat Riemann für die Lösungen der Wellengleichung (4) eine Integraldarstellung mit hypergeometrischen Funktionen angegeben und durch diese Lösungen die Ausbreitung endlicher Druckwellen in idealen Gasen beschrieben³⁾. Die vorangehenden Untersuchungen zeigen, daß die Riemannschen Lösungen nicht nur für die idealen Gase, sondern ebensowohl für die durch Gl. (9) gekennzeichneten hypothetischen Gase gelten.

§ 3. Stationäre zweidimensionale Strömungen

Wir führen nun analoge Untersuchungen durch für die zweidimensionale stationäre isentropische Gasströmung. Hier kann man ein Strömungspotential $f(\lambda, \mu)$ einführen²⁾ als Funktion der charakteristischen Zustandsvariablen

$$\left. \begin{matrix} 2\lambda \\ 2\mu \end{matrix} \right\} = \pm \vartheta + W \quad \text{mit} \quad W = \int_{\frac{w}{a}}^{\frac{w}{a}} \frac{\sqrt{w^2 - a^2}}{aw} dw \quad \dots \quad (10).$$

w ist der Betrag und ϑ der Winkel des Geschwindigkeitsvektors und es wird vorausgesetzt, daß W nicht konstant, also w eine Funktion $w(W)$ von w ist. Außerdem soll $w > a$ sein, d. h. wir beschränken uns auf Strömungen mit Überschallgeschwindigkeit; dann sind die charakteristischen Variablen reell. Durch Auflösung von Gl. (10) ergibt sich

$$\vartheta = \lambda - \mu, \quad W = \lambda + \mu, \quad \text{also} \quad w = w(\lambda + \mu).$$

Nach Ermittlung des Strömungspotentials $f(\lambda, \mu)$ ist der Strömungsverlauf ($x, y =$ Ortskoordinaten) durch

$$\left. \begin{aligned} 2x &= \frac{1}{w'} \cos(\lambda - \mu) (f_\lambda + f_\mu) - \frac{1}{w} \sin(\lambda - \mu) (f_\lambda - f_\mu) \\ 2y &= \frac{1}{w'} \sin(\lambda - \mu) (f_\lambda + f_\mu) + \frac{1}{w} \cos(\lambda - \mu) (f_\lambda - f_\mu) \end{aligned} \right\} \dots \quad (11)$$

vollständig festgelegt.

Das Strömungspotential genügt der Wellengleichung

$$\boxed{f_{\lambda\mu} - \frac{w'' + w}{2w'} (f_\lambda + f_\mu) = 0} \quad \dots \quad (12),$$

wobei die Striche Ableitungen der durch die Druck-Dichte-Beziehung $p(\varrho)$ gegebenen Funktion $w(\lambda + \mu)$ nach $\lambda + \mu$ bedeuten.

Wir fragen jetzt wieder nach den allgemeinsten Druck-Dichte-Beziehungen $p(\varrho)$, für welche sich die Wellengleichung (12) zur Darbouxschen Gl. (4) spezialisiert. Sie ergeben sich aus der Bedingung

$$\frac{w'' + w}{2w'} + \frac{n}{\lambda + \mu} = 0 \quad \dots \quad (13),$$

aus der man (vgl. E. Kamke: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, I, 1942, S. 425, 2.105)

$$\boxed{\begin{aligned} w &= C_1 \left(\frac{1}{\lambda + \mu} \frac{\partial}{\partial(\lambda + \mu)} \right)^n \cos(\lambda + \mu) + C_2 \left(\frac{1}{\lambda + \mu} \frac{\partial}{\partial(\lambda + \mu)} \right)^n \sin(\lambda + \mu) \quad \text{für } n \geq 0 \\ w &= C_1 [(\lambda + \mu + C_2) \sin(\lambda + \mu) + \cos(\lambda + \mu)] \quad \text{für } n = -1 \end{aligned}} \quad (14)$$

erhält. Durch Gl. (14) ist in ähnlicher Weise wie in § 2 die Druck-Dichte-Beziehung $p(\varrho)$ bestimmt. Wir beschränken uns darauf, diese im Sonderfall $n = 0$ in § 4 herzuleiten.

Während die bei der nichtstationären eindimensionalen Strömung eingeführten, durch Gl. (9) gekennzeichneten hypothetischen Gase als Spezialfall die idealen Gase enthielten, sind die idealen Gase unter den bei der stationären zweidimensionalen Strömung eingeführten, durch Gl. (14) gekennzeichneten hypothetischen Gasen (— vom Sonderfall $n = 0$ abgesehen —) nicht enthalten.

Zusatzbemerkung: Für die hypothetischen Gase, welche durch die Differentialgleichung (13) mit nicht ganzzahligen Werten von n gekennzeichnet sind, lassen sich die zweidimensionalen stationären Strömungen mit Hilfe der Riemannschen Lösungen³⁾ der Darbouxschen Gleichung durch hypergeometrische Funktionen darstellen.

³⁾ H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, II, 4. Auflage 1900, S. 508—515.

§ 4. Diskussion der Sonderfälle $n = 0$ und $n = -1$

Im Fall $n = 0$ erhält man bei den eindimensionalen nichtstationären Strömungen an Stelle der Gl. (6), (7) und (8)

$$a = A + C, \quad \varrho = \bar{C}(A + C), \quad p = p_0 + \frac{\bar{C}}{3}(A + C)^3$$

und daher an Stelle der Gl. (9) die Druck-Dichte-Beziehung

$$\boxed{p = p_0 + C_0 \varrho^3} \dots \dots \dots (15).$$

Hier reduziert sich die Zahl der Parameter von 3 auf 2, es ergibt sich also im wesentlichen nur die Druck-Dichte-Beziehung der idealen Gase mit $\kappa = 3$.

Bei den zweidimensionalen stationären Strömungen spezialisiert sich Gl. (14) im Fall $n = 0$ zu

$$w = C_1 \cos(\lambda + \mu) + C_2 \sin(\lambda + \mu) = w_0 \cos(\lambda + \mu - \vartheta_0) \dots \dots \dots (16)$$

mit wiederum nur zwei Integrationskonstanten w_0, ϑ_0 . Um hieraus die Druck-Dichte-Beziehung herzuleiten, bilden wir zunächst nach Gl. (10) und (16)

$$\frac{\sqrt{w_0^2 - w^2}}{aw} dw = dW = d(\lambda + \mu) = d\left(\arccos \frac{w}{w_0}\right) = -\frac{dw}{\sqrt{w_0^2 - w^2}}$$

und erhalten

$$a^2 = \left(\frac{w}{w_0}\right)^2 (w_0^2 - w^2).$$

Dann ergibt sich aus der Bernoullischen Gleichung

$$\frac{w^2}{2} + \int \frac{dp}{\varrho} = \text{const}$$

für die Dichte

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{dp}{\varrho} \cdot \frac{d\varrho}{dp} = \frac{dp}{\varrho} \cdot \frac{1}{a^2} = -\frac{w dw}{a^2} = -\frac{w_0^2 dw}{w(w_0^2 - w^2)},$$

also

$$\varrho = \frac{C}{w} \sqrt{w_0^2 - w^2}$$

und für den Druck

$$dp = a^2 d\varrho = \left(\frac{w}{w_0}\right)^2 (w_0^2 - w^2) d\varrho = C^2 w_0^2 \frac{\varrho^2 d\varrho}{(\varrho^2 + C^2)^2},$$

also

$$\boxed{p = p_0 + C_0 \left(\frac{\varrho}{1 + \varrho^2} - \arctg \varrho \right)} \dots \dots \dots (17)$$

Im Fall $n = -1$ erhält man bei den eindimensionalen nichtstationären Strömungen in analoger Weise

$$a = A(CA - 1), \quad \varrho = \frac{\bar{C}(CA - 1)}{A}, \quad dp = \bar{C}(CA - 1)^2 dA$$

und hieraus die Druck-Dichte-Beziehung

$$p = \begin{cases} p_0 - \frac{\bar{C}^2}{\varrho} & \text{bei } C = 0, \\ p_0 + \left(\frac{\varrho}{C_1 + C_2 \varrho} \right)^3 & \text{bei } C \neq 0 \end{cases} \dots \dots \dots (18).$$

Bei den zweidimensionalen stationären Strömungen mit $n = -1$ lassen sich die zur Aufstellung der Druck-Dichte-Beziehung erforderlichen Eliminationen nicht explizit durchführen.

Die Sonderfälle $n = 0$ und $n = -1$ kann man dazu verwenden, um Strömungen realer Gase mit beliebig vorgegebener Druck-Dichte-Beziehung zu approximieren. In der Regel muß man sich bei den in der Praxis vorliegenden Anfangs- und Randwertproblemen der Gasströmungen mit numerischen Lösungen des Einzelfalls begnügen. Zur Gewinnung allgemeinerer Einsichten ist es daher sehr wünschenswert explizite Darstellungen von Strömungen zur Verfügung zu haben, die sich in verhältnismäßig einfacher Weise den vorliegenden Anfangs- und Randbedingungen anpassen lassen. Die Sonderfälle $n = 0$ und $n = -1$ liefern solche Darstellungen, allerdings mit physikalisch nicht realisierten hypothetischen Druck-Dichte-Beziehungen. Durch geeignete Wahl der in den hypothetischen Druck-Dichte-Beziehungen auftretenden

Parameter kann jedoch eine gewisse Approximation der realen Druck-Dichte-Beziehung erreicht werden. Die Druck-Dichte-Beziehungen (15) bzw. (17) des Falles $n = 0$ enthalten 2 Parameter und ermöglichen dadurch eine Approximation erster Ordnung, d. h. eine Übereinstimmung der realen und hypothetischen Druckkurven $p = p(\varrho)$ in einem Punkt und der Tangente in diesem Punkt. Die Druck-Dichte-Beziehung (18) des Falles $n = -1$, $C \neq 0$ enthält 3 Parameter und ermöglicht dadurch sogar eine Approximation zweiter Ordnung, d. h. eine Übereinstimmung der Druckkurven in der Krümmung.

Die Druck-Dichte-Beziehungen (15), (17) und (18) sind in anderem Zusammenhang schon mehrfach bei gasdynamischen Untersuchungen verwendet worden. Die Beziehung (15) findet sich in Arbeiten von Bechert und Pfriem, die Beziehung (17) wurde gelegentlich von Prandtl, Munk und Pérès, die Beziehung (18) von Sauter benützt.

§ 5. Beziehungen zur Theorie der Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken

Im Vorangehenden wurden explizite Darstellungen von Gasströmungen dadurch gefunden, daß die Wellengleichung (3) bzw. (12) in die Form der Darboux'schen Differentialgleichung (4) gebracht wurde. Eine andere Möglichkeit, zu expliziten Darstellungen von Gasströmungen zu gelangen, bietet die Theorie der Differentialgleichungen mit geradlinigen Charakteristiken⁴⁾. Diese bezieht sich auf lineare Differentialgleichungen

$$A(\xi, \eta) f_{\xi\xi} + 2B(\xi, \eta) f_{\xi\eta} + C(\xi, \eta) f_{\eta\eta} = 0 \quad (19),$$

die in den Ableitungen zweiter Ordnung homogen sind, und auf die durch die Legendre-Transformation

$$\Xi = f_{\xi}, \quad H = f_{\eta}, \quad F = \xi \Xi + \eta H - f, \quad \xi = F_{\Xi}, \quad \eta = F_H$$

zugeordneten quasilinearen Differentialgleichungen

$$A(F_{\Xi}, F_H) F_{HH} - 2B(F_{\Xi}, F_H) F_{H\Xi} + C(F_{\Xi}, F_H) F_{\Xi\Xi} = 0 \quad (20).$$

Wenn die Charakteristiken der Gl. (19) geradlinig sind oder ein Rückungnetz mit 2 Scharen paralleler kongruenter Kurven bilden, sind die Charakteristikennetze der Gl. (20) Rückungnetze bzw. Geradenetze. In beiden Fällen lassen sich die Lösungen der Differentialgleichungen (19) und (20) mit Hilfe zweier willkürlicher Funktionen explizit angeben⁴⁾.

Man kann nun explizite Darstellungen von Gasströmungen dadurch erhalten, daß man die Wellengleichungen (3) und (12) durch Auswahl geeigneter Druck-Dichte-Beziehungen in die Gl. (19) zu transformieren sucht, derart, daß die Charakteristiken in der ξ, η -Ebene ein Geradenetz oder Rückungnetz bilden. Die allgemeine Durchführung dieser Aufgabe soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben. Wir wollen ohne auf die Beweise einzugehen, lediglich auseinandersetzen, daß man als Sonderfälle von neuem die in § 4 diskutierten Strömungen mit $n = 0$ und $n = -1$ erhält:

Im Fall $n = 0$ der zweidimensionalen stationären Strömung, der durch die Druck-Dichte-Beziehung (17) gekennzeichnet ist, kann man als ξ, η -Ebene die u, v -Hodographenebene ($u, v =$ cartesische Geschwindigkeitskoordinaten) und als Ξ, H -Ebene die x, y -Strömungsebene nehmen. Die Charakteristiken in der u, v -Ebene bilden ein Rückungnetz, das durch Rotation eines Kreises um einen Punkt desselben erzeugt wird. Die Gleichung dieser Charakteristiken in Polarkoordinaten ergibt sich aus Gl. (16), indem man unter Berücksichtigung von $\lambda - \mu = \vartheta$ in Gl. (16) an Stelle von $\lambda + \mu$ entweder $2\lambda - \vartheta$ oder $2\mu + \vartheta$ einführt und $\lambda = \text{const}$ bzw. $\mu = \text{const}$ setzt.

Im Fall $n = 0$ der eindimensionalen nichtstationären Strömung, der durch die Druck-Dichte-Beziehung (15) gekennzeichnet ist, kann man als ξ, η -Ebene die u, q -Zustandsebene

($u =$ Gasgeschwindigkeit, $q = -\frac{u^2}{2} - \int \frac{dp}{\varrho}$) und als Ξ, H -Ebene die x, t -Ebene wählen. Die

Charakteristiken in der u, q -Ebene bilden ein Rückungnetz, das von kongruenten und parallelen Parabeln erzeugt wird und als Einhüllende eine parallele Parabel doppelter Größe besitzt²⁾.

Im Fall $n = -1$ der eindimensionalen nichtstationären Strömung, der durch die Druck-Dichte-Beziehung (18) gekennzeichnet ist, hat man die Unterfälle $C = 0$ und $C \neq 0$ zu unterscheiden. Bei $C = 0$ kann man als ξ, η -Ebene und Ξ, H -Ebene wieder die u, q - und x, t -Ebenen benützen und erhält dann in der u, q -Ebene ein geradliniges, von den Tangenten einer Parabel erzeugtes Charakteristikennetz²⁾. Bei $C \neq 0$ ergibt sich dasselbe Charakteristikennetz, jedoch hat man jetzt

$$\xi = u, \quad \eta = \frac{1}{4}(A^2 - u^2), \quad \Xi = x - \left(1 + \frac{a}{A}\right)ut, \quad H = -\frac{2a}{A}t \text{ zusetzen.}$$

⁴⁾ R. Sauer, Z. angew. Math. Mech. 25/27, 1947, S. 151–153.

Der Übergang vom ebenen Spannungszustand zum ebenen Formänderungszustand im breiten gebogenen Balken¹⁾

Von G. Sonntag in München

Unter Verwendung bekannter Lösungsansätze für Platten wird der Übergang vom ebenen Spannungszustand zum ebenen Formänderungszustand beim breiten gebogenen Balken allgemein streng angegeben und für einige Beispiele berechnet.

By use of the known solution for plates, the transition from the plane state of stress to the plane state of deformation is given, generally and exactly, in the case of the bending of a broad beam, and illustrated by some examples.

On fait usage des solutions bien connues pour des plaques pour donner exactement et de manière générale, dans le cas d'une poutre large courbée, la transition d'un état de tension plane dans un état de déformation plane; quelques exemples sont donnés.

Переход от плоского напряженного состояния к плоскому состоянию деформаций в широких балках, нагруженных на изгиб, исследуется в общей и строгой форме при помощи известных решений для пластин и иллюстрируется на нескольких частных случаях.

I. Einführung

Wir betrachten nach Bild 1 einen gewöhnlichen rechteckigen Balken der Stützweite $2a$. Seine Breite $2b$ sei klein gegenüber seiner Stützweite $2a$. Unter einer Belastung $p=f(x)$ wird sich der Balken durchbiegen, die Biegespannung überschreite nicht die Elastizitätsgrenze des isotropen Werkstoffes. Wenn die Querdehnungszahl $\nu \neq 0$ ist, erfahren die Druckfasern eine

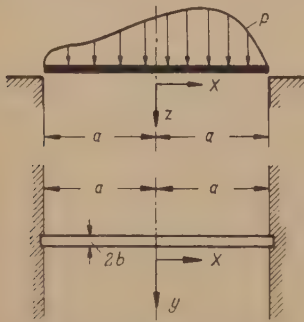


Bild 1. Schmalen, zweiseitig frei drehbar gelagerter Balken

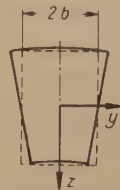


Bild 2. Querverformung des gebogenen Balkens; ebener Spannungszustand

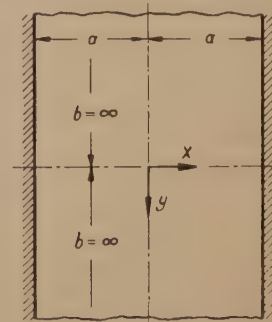


Bild 3. Plattenstreifen, zweiseitig frei drehbar gelagert

Querdehnung, die Zugfasern eine Querkontraktion, solange diese Querverformung nicht behindert ist. Lange schmale Balken sind in ihrer Querdehnung unbehindert, ihr Querschnitt verformt sich nach Bild 2. Spannungen treten nur in der x, z -Richtung auf, die y -Richtung ist spannungsfrei; deshalb sprechen wir von einem ebenen Spannungszustand.

Wenn die Breite $2b$ des Balkens immer mehr zunimmt, liegt zuletzt der unendlich ausgedehnte Plattenstreifen nach Bild 3 vor. Die Belastung p sei von y unabhängig. Von den x, z -Ebenen ist keine irgendwie ausgezeichnet; sie sind alle vor und nach einer Belastung $p=f(x)$ parallel ohne Änderung ihres Abstandes. Denkt man sich den Plattenstreifen in parallele Balken nach Bild 2 aufgeschnitten, so können diese wegen ihres Zusammenhanges keine Querverformung erfahren, sie bleiben eben nach Bild 4, man spricht vom ebenen Formänderungszustand. Dieser wird jedoch erzwungen von Spannungen in y -Richtung. Es läßt sich leicht nachweisen, daß hier die Beziehung $\sigma_y = \nu \sigma_x$ und $M_y = \nu M_x$ gilt.

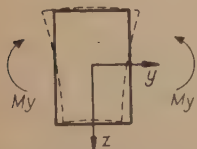


Bild 4. Momente M_y zur Erzwingung des ebenen Formänderungszustandes

Wenn der breite Balken jetzt die endliche Breite $2b$ hat, so ist an den Rändern $y = \pm b$, $\sigma_y = 0$ und $M_y = 0$ (selbstverständlich sind auch die Ersatzscherkräfte $Q_y^* = 0$). Es liegt dort der ebene Spannungszustand vor. Mit zunehmendem Abstand vom freien Rand werden sich die jetzt auftretenden Spannungen σ_y den Spannungen des ebenen Formänderungszustandes nähern. Bevor die strenge Lösung gegeben wird, soll noch eine weitere Betrachtung vorgenommen werden.

Eine völlig freie Platte werde an ihren Rändern $x = \pm a$ durch ein gleichmäßiges Moment M_x belastet (Bild 5). Die Platte verformt sich dann zu einer Sattelfläche mit den Krümmungen

¹⁾ Die Untersuchung wurde durchgeführt nach Anregung von Herrn Prof. L. Prandtl auf Empfehlung von Herrn Prof. L. Föppl, wofür ich beiden Herren verbindlichst danke.

$\varrho_1 = \frac{1}{R_1}$ und $\varrho_2 = \frac{1}{R_2}$ der Größen $\varrho_{10} = \frac{M_x}{EJ}$; $\varrho_{20} = -\nu\varrho_{10}$, wobei der Index 0 bedeutet, daß es sich um die völlig freie Platte handelt. Wenn jetzt die Platte an den Rändern $x = \pm a$ nicht mehr frei, sondern gelenkig gelagert ist, werden die Krümmungen behindert und zwar um so mehr, je länger die gelagerte Seite im Verhältnis zur Stützweite ist. Für den Plattenstreifen, $b/a = \infty$, ist die Krümmung $\varrho_2 = 0$. Es zeigt sich nun, daß, je mehr die Krümmung ϱ_2 durch Kräfte am gelagerten Rand herabgesetzt wird, auch die Krümmung ϱ_1 verringert wird;

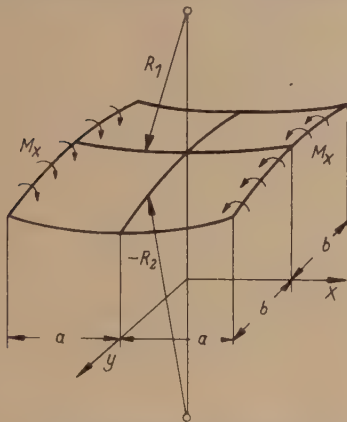


Bild 5. Sattelfläche des völlig freien durch M_x belasteten breiten Balkens

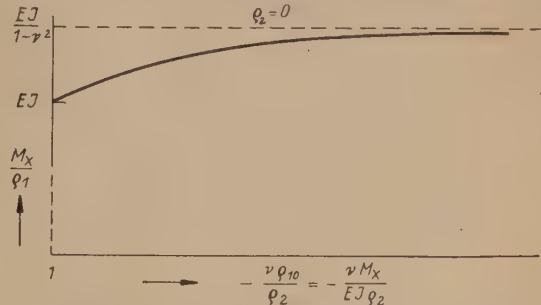


Bild 6. Steifigkeit M_x/ϱ_1 des breiten Balkens als Funktion der Krümmung ϱ_1 . $\varrho_2 = 0$ entspricht dem ebenen Formänderungszustand

was somit als eine Erhöhung der Plattensteifigkeit in Erscheinung tritt. Es soll nun die Plattensteifigkeit M_x/ϱ_1 als Funktion von ϱ_{20}/ϱ_2 bzw. $-\nu\varrho_{10}/\varrho_2$ dargestellt werden. Es gilt $\varrho_1 = \varrho_{10} + \nu(\varrho_{20} - \varrho_2)$, wodurch der Einfluß der Krümmungsverringerung $\varrho_{20} - \varrho_2$, infolge der Lagerung, auf die Hauptkrümmung ϱ_{10} ausgedrückt wird. Es folgt nach einfacher Umformung $\frac{\varrho_1}{\varrho_{10}} = 1 - \nu^2 - \frac{\nu\varrho_2}{\varrho_{10}}$ und die Darstellung (Bild 6) $\frac{M_x}{\varrho_1} = \frac{EJ}{1 - \nu^2 - \nu\varrho_2/\varrho_{10}}$ für den Bereich $\varrho_2 = \varrho_{20} = -\nu\varrho_{10}$ bis $\varrho_2 = 0$.

Nach dieser Vorbetrachtung besteht die Aufgabe nun darin, die Krümmung ϱ_2 bzw. das Moment M_y als Funktion von y zu bestimmen, um daraus zu erkennen, wie und in welchem Maße der Übergang vom ebenen Spannungszustand am Rand $y = \pm b$ der Platte zum ebenen Formänderungszustand innerhalb der Platte erfolgt. Nachfolgend wird die strenge Lösung dieser Aufgabe gegeben.

II. Die allgemeine Lösung

Zunächst wird entsprechend einem unendlich breiten Balken nach Bild 3 für eine beliebige Normalbelastung $p = f(x)$ nach der gewöhnlichen Balkenformel M_x berechnet. Für die Durchbiegung wäre wegen der behinderten Querdehnung $E/(1 - \nu^2)$ an Stelle von E zu setzen. Aus gleichem Grunde tritt, wie zuvor näher ausgeführt, $M_y = \nu M_x$ auf. Schneidet man jetzt aus diesem Plattenstreifen einen Balken endlicher Breite $2b$ heraus, so muß dem Schnittmoment M_y ein gleiches Moment umgekehrten Vorzeichens überlagert werden, um den Rand $y = \pm b$ lastfrei zu erhalten.

Die Aufgabe ist somit auf die Zusatzlösung der längs der Seiten $x = \pm a$ drehbar gelagerten oder eingespannten Platte zurückgeführt, deren freie Ränder $y = \pm b$ durch gleiche Momente $M_y = f(x)$ belastet werden (s. Bild 7).

Der allgemeine Ansatz lautet²⁾:

$$w = \left. \begin{aligned} &\sum_{i=0,1,2,3 \dots} A_i \cos i\lambda x (i\lambda y \sin i\lambda y + \eta_i \cos i\lambda y) \\ &+ \sum_{j=2,4,6 \dots} B_j \sin j\lambda x (j\lambda y \sin j\lambda y + \eta_j \cos j\lambda y) \end{aligned} \right\} \dots \dots (1),$$

worin $w =$ Durchbiegung, $\lambda = \frac{\pi}{2a}$, $A, B, \eta =$ Beiwerte.

Es läßt sich zeigen, daß der Ansatz die Bipotentialgleichung $\Delta\Delta w = 0$ erfüllt. $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$. Die Beiwerte A und B werden aus den Auflagerbedingungen und der

²⁾ Nachfolgende Funktionen sind zur Lösung von Plattenproblemen längst bekannt. Nach vielseitiger Rückorientierung des Verfassers scheint die hier behandelte Sonderfrage noch nicht durchgeführt zu sein.

Randbelastung $M_y = f(x)$ bestimmt. Die Beiwerte η gibt die Forderung nach Verschwinden der Ersatzscherkräfte Q_y^* an den freien Rändern $y = \pm b$. (Die Ersatzscherkräfte resultieren aus der Zusammenfassung der Querkräfte und Torsionsmomente.)³⁾

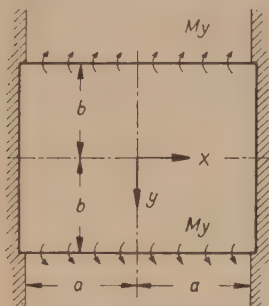


Bild 7. Breiter Balken unter Momentbelastung der freien Ränder

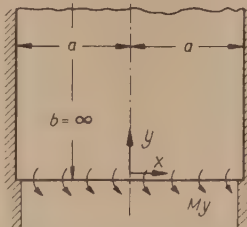


Bild 8. Plattenhalbstreifen unter Momentbelastung des freien Randes

Der Ansatz (1) wird unbequem für große Werte b/a . Für $b \geq 3a$ verwendet man zweckmäßig den unendlich ausgehenden Platten-Halbstreifen nach Bild 8. Es folgt entsprechend (1)

$$w = \sum_{i=0,1,2,3,\dots}^{\infty} A_i \cos i \lambda x (1 - \eta_i y) e^{-i \lambda y} + \sum_{j=2,4,6,\dots}^{\infty} B_j \sin j \lambda x (1 - \eta_j y) e^{-j \lambda y} \quad (2).$$

Damit kann die Aufgabe für beliebige Randbelastung $M_y = f_1(x)$ bzw. $M_y = f_2 p(x)$ als gelöst betrachtet werden.

III. Beispiele

a) Der gelenkig gestützte breite Balken mit gleichmäßiger Belastung

Das Beispiel gleichmäßiger Belastung und gelenkiger Stützung wurde gewählt, weil sich hierbei das Moment M_y in genügender Annäherung durch $\cos(\pi x/2a)$ ausdrücken läßt, so daß man mit dem ersten Glied der anzusetzenden Reihe auskommt. Bei einer Belastung der Platte durch ein reines Moment M_x wäre auch am freien Rand ein konstantes Moment $M_y = \nu M_x = \text{const}$ anzubringen, wofür die Rechnung sehr viel komplizierter wird. Dieser Fall wird später noch ausführlicher besprochen.

Für den unendlich breiten Balken gleichmäßiger Belastung p gilt bekanntlich, wenn Koordinaten nach Bild 3 zugrunde gelegt werden:

$$M_x = M_{x0} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); \quad M_y = \nu M_x \quad (3),$$

$$w = M_{x0} \frac{5}{12} a^2 \left(\frac{6x^2}{5a^2} - \frac{x^4}{5a^4} - 1\right) \cdot \frac{1}{N} \quad (4),$$

worin

$$N = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad h = \text{Balkenhöhe},$$

Um die Rechnung zu vereinfachen, setzen wir mit geringem Fehler anstatt (3)

$$M_x = M_{x0} \cos \lambda x \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{\pi}{2a}; \quad M_y = \nu M_x \quad (5),$$

damit wird

$$w = -\frac{M_{x0}}{\lambda^2 N} \cos \lambda x \quad (6),$$

Für w_{\max} beträgt die Abweichung nach (6) gegenüber (4) $\approx -2,5\%$.

Zu unserem neuen Ansatz (5), (6) gehört streng eine Belastung $p = c \cdot \cos \lambda x$. Obwohl wir eingangs eine gleichmäßige Belastung p angenommen hatten, dürften die Ansätze (5), (6) unsere Frage nach dem Übergang vom ebenen Spannungszustand zum ebenen Formänderungszustand befriedigend beantworten, da sowohl die Momentenverteilung M_x als auch die Durchbiegung w dem Fall gleichmäßiger Last weitgehend angenähert wurden.

Gehen wir jetzt zum Balken endlicher Breite $2b$ über, so folgt für die anzubringende Randbelastung M_y nach (1):

$$w = A \cos \lambda x (\lambda y \sin \lambda y + \eta \cos \lambda y) \quad (7).$$

Die Stützbedingung am Rand $x = \pm a$, $w = 0$ und $M_x = 0$ ist erfüllt. A bestimmen wir aus der Bedingung $(M_y)_{y=\pm b} = M_{y0} \cos \lambda x$. Es folgt mit den Abkürzungen $\frac{\partial}{\partial x} = \dots'$ und $\frac{\partial}{\partial y} = \dots''$

$$M_y = -N(w'' + \nu w'') = -NA \cos \lambda x \{ \lambda^3 y \sin \lambda y + \lambda^2 (2 + \eta) \cos \lambda y \} + \nu [-\lambda^3 y \sin \lambda y - \lambda^2 \eta \cos \lambda y] \quad (8).$$

³⁾ Vgl. etwa die Ausführungen in C. B. Biezeno und R. Grammel: Techn. Dynamik, Springer, Berlin 1939, S. 436 oder Beton-Kalender (1944), S. 129.

Daraus für $y = \pm b$ und $x = 0$:

$$A = \frac{M_{y_0}}{\lambda^2 \{ \lambda b (1 - \nu) \sin \lambda b + [2 + \eta (1 - \nu)] \cos \lambda b \} N} \dots \dots (9).$$

Die Ersatzscherkräfte

$$\left. \begin{aligned} Q_y^* &= -N[w''' + (2 - \nu)w''] \\ &= -NA \cos \lambda x \{ \lambda^4 y \cos \lambda y + \lambda^3 (3 + \eta) \sin \lambda y \\ &\quad + (2 - \nu)[- \lambda^4 y \cos \lambda y - \lambda^3 (1 + \eta) \sin \lambda y] \} \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

verschwinden für $y = 0$ wie aus Symmetriegründen erforderlich, aber auch für $y = \pm b$ muß $Q_y^* = 0$ sein; daraus η wie folgt

$$\eta = \frac{-(1 - \nu) \lambda y \cos \lambda y + (1 + \nu) \sin \lambda y}{(1 - \nu) \sin \lambda y} = -\lambda b \operatorname{ctg} \lambda b + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \dots (11).$$

Nachdem für einen gegebenen Wert b bzw. b/a die Beiwerte η nach (11) und A nach (9) ermittelt sind, kann der Verlauf von M_y nach (8), die Biegung w nach (7) oder jede beliebige Schnittgröße nach den bekannten Differentialformeln der Plattentheorie berechnet werden.



Bild 9. Verlauf von M_y über die Breite $2b$ des breiten zweiseitig frei drehbar gelagerten Balkens mit gleichmäßiger Belastung in Abhängigkeit von der Stützweite $2a$. $M_{y_0} = \nu M_{x_0}$ entspricht dem ebenen Formänderungszustand

In Bild 9 wurde für Abmessungsverhältnisse $b/a = 0,25; 0,5; 1,0; 2,0$ und ∞ der Verlauf des Quermomentes M_y : $(M_y)_{b=\infty}$ im Mittelschnitt $x=0$ dargestellt (Rechengenauigkeit!) für $\nu=0,5$. In der Darstellung wurde die Auflagerbreite $2b$ konstant gelassen und die Stützweite $2a$ variiert. Für andere Schnitte $x = \text{const}$ ergibt sich hier das gleiche Bild, wenn M_{y_0} jetzt allgemein das Moment des ebenen Formänderungszustandes bedeutet.

b) Breiter Balken mit reiner Momentenbelastung $M_x = \text{const}$.

Wie im Beispiel a) bereits erwähnt, muß der zu überlagernde Ansatz der Durchbiegung w (1) so gewählt werden, daß sich am freien Rand ein konstantes Moment M_y ergibt. Dieser Bedingung $M_y = \text{const}$ für $y = \pm b$ genügt der Ansatz⁴⁾ entsprechend (8):

$$\frac{M_y}{N} = -\frac{4}{\pi} \sum_i A_i \cdot \frac{1}{i} \cos i \lambda x \left\{ \begin{aligned} &\lambda^3 i^3 y \sin i \lambda y + i^2 \lambda^2 (2 + \eta_i) \cos i \lambda y \\ &+ \nu [-\lambda^3 i^3 y \sin i \lambda y - i^2 \lambda^2 \eta_i \cos i \lambda y] \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

mit $i = 1, -3, +5, -7 \dots$

A_i und η_i werden für jedes Glied für sich bestimmt entsprechend (9) und (11) wenn darin anstatt λ jetzt $i \lambda$ gesetzt wird. Für den freien Rand $y = \pm a$ folgt dann nach Voraussetzung

$$M_y = M_{y_0} \cdot \frac{4}{\pi} \left\{ \cos \lambda x - \frac{1}{3} \cos 3 \lambda x + \frac{1}{5} \cos 5 \lambda x - \frac{1}{7} \cos 7 \lambda x + \dots \right\} = M_{y_0} = \text{const}^{4)}.$$

⁴⁾ Vgl. Hütte, I, 27. Aufl., S. 207.

Die Differentialbeziehung zwischen M_y und w läßt den Ausdruck für w leicht erkennen, es folgt

$$w = \frac{4}{\pi} \sum_i A_i \cdot \frac{1}{i} \cos i\lambda x (i\lambda y \operatorname{Sin} i\lambda y + \eta_i \operatorname{Cos} i\lambda y) \quad (13)$$

mit $i = 1, -3, +5, -7 \dots$

Gl. (8) läßt erkennen, daß bei gleichmäßiger Belastung (oder streng für die Belastung $p = c \cdot \cos \lambda x$, dem Gl. (8) entspricht) die Verteilung von $M_y = f(y) \cdot \cos \lambda x$ für alle Schnitte parallel zum freien Rand $y = \pm b$ ähnlich ist. Das trifft bei dem zunächst einfach erscheinenden Fall konstanter Momentbelastung nicht mehr zu, da die Glieder der Reihe (12) in y verschieden schnell abklingen.

c) Der zweiseitig gelenkig gestützte Plattenhalbstreifen mit gleichmäßiger Belastung

Wenn $b > 2a$ wird, können wir den Einfluß des zweiten freien Randes vernachlässigen. Wir verwenden an Stelle von (7) den entsprechenden Ansatz nach (2):

$$w = A \cos \lambda x \cdot (1 - \eta y) e^{-\lambda y} \quad (14),$$

wobei jetzt nach Bild 8 y vom Rande aus zählt.

Es folgt entsprechend (8):

$$M_y = -NA \cos \lambda x \cdot e^{-\lambda y} \{ \lambda^2 (1 - \eta y) + 2\eta\lambda - \nu\lambda^2 (1 - \eta y) \} \quad (15).$$

Daraus folgt für $y = 0$:

$$A = \frac{M_{y_0}}{[\lambda(1 - \nu) + 2\eta]\lambda N} \quad (16).$$

Die Ersatzscherkräfte

$$Q_y^* = -NA \cos \lambda x \cdot e^{-\lambda y} \cdot \lambda^2 \{ -\lambda(1 - \eta y) - 3\eta + (2 - \nu)[\lambda(1 - \eta y) + \eta] \} \quad (17)$$

verschwinden für $y = 0$, wenn

$$\eta = \lambda \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \quad (18).$$

Die einfache Ausrechnung des Verlaufes von M_y und w vom freien Rande zum Inneren des unendlichen Halbstreifens fortschreitend, wurde für $x=0$ und für die Querdehnungszahl $\nu=0,5$ in Bild 10 dargestellt.

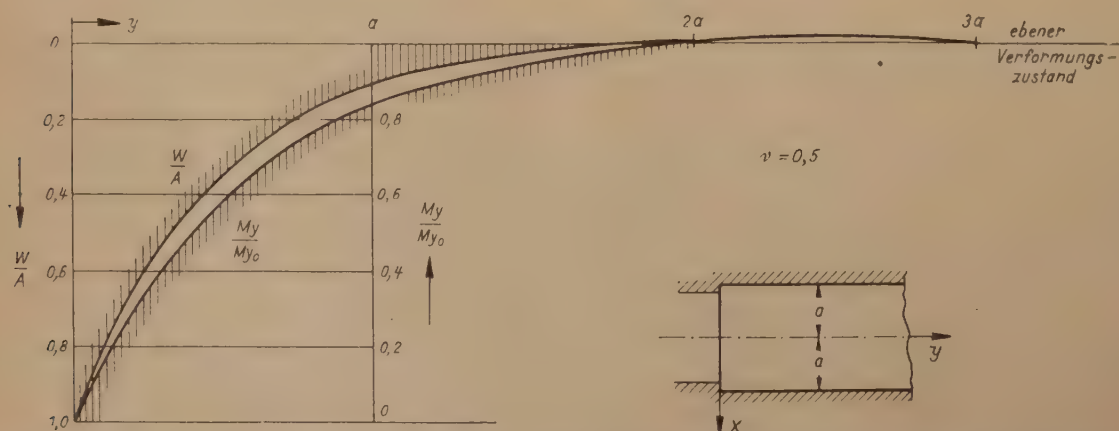


Bild 10. Übergang des ebenen Spannungszustandes (am freien Rand) zum ebenen Formänderungszustand beim zweiseitig frei drehbar gelagerten Plattenhalbstreifen mit gleichmäßiger Belastung. Die Kurve W/A gibt die zusätzliche Durchbiegung in Randnähe an. M_{y_0} entspricht dem ebenen Formänderungszustand

Der ebene Formänderungszustand wird hier in einem Abstand vom freien Rand erreicht, der gleich der Stützweite des Plattenhalbstreifens ist.

Beim eingespannten breiten Balken ist wegen des Vorzeichenwechsels der Biegespannungen ein wesentlich schnellerer Übergang zum ebenen Formänderungszustand zu erwarten. Auf die einfache Rechnung wird hier verzichtet.

Eingegangen am 21. November 1950.

Die Temperaturverteilung in Schmierschichten zwischen parallelen wärmedurchlässigen Wänden

Von G. Vogelpohl in Göttingen

Vf. zeigt, daß für die Couette-Strömung einer Flüssigkeit, deren Zähigkeit nicht von der Temperatur abhängt, für die Berechnung der Mittelwerte der Temperatur die Strömungsgeschwindigkeiten quer zur Schicht gemittelt werden dürfen, und daß dazu die Wärmeleitung quer zur Schicht vernachlässigt werden darf.

The author, considering the Couette flow of a fluid, the viscosity of which does not depend on the temperature, proves that, for the computation of the mean values of the temperature, it is possible to use the mean values of the velocity of the flow taken across the layer and, for that purpose, to neglect the heat conduction in that direction.

L'auteur traite l'écoulement de Couette pour un fluide, dont la viscosité est indépendante de la température; il montre qu'on peut, pour un tel fluide, évaluer les valeurs moyens de la température en employant les valeurs moyens de la vitesse du flux à travers la couche, et qu'il est permis, à cette fin, de négliger la conduction de la chaleur en cette direction.

Автор исследует поток Куэтта для жидкости, вязкость которой не зависит от температуры, и показывает, что при вычислении средней температуры можно пользоваться средним значением скорости потока в поперечном сечении слоя и что при этом допустимо пренебрегать теплопроводностью в поперечном направлении.

1. Aufgabestellung

In der hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung wird zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung die Temperatur und damit die Zähigkeit des Schmiermittels meist als konstant angenommen. Das ist ein Grenzfall, der entweder langsame Bewegung oder sehr große Wärmeleitfähigkeit des Schmiermittels voraussetzt. Nun haben aber alle Flüssigkeiten eine geringe Wärmeleitfähigkeit, so daß es bei größeren Geschwindigkeiten, wenn die Erwärmung durch innere Reibung nicht mehr vernachlässigbar klein ist, sinnvoll erscheint, den anderen Grenzfall zu betrachten, bei dem die gesamte entwickelte Wärme im Schmierfilm verbleibt und dessen Temperatur erhöht. Dafür werden wärmeundurchlässige Wände vorausgesetzt, die es in Wirklichkeit nicht gibt. Andererseits stehen aber bei hohen Geschwindigkeiten für den Wärmeübergang in die Gleitflächen nur außerordentlich geringe Zeiten zur Verfügung. Zum Beispiel hat Buske bei Gleitgeschwindigkeiten von 73 m/sec. Temperaturerhöhungen bis zu 180°C gemessen (Lager für hohe Anforderungen, Bericht, S. 11 der Lilienthal-Gesellschaft, 1940, S. 21, Abb. 38), wobei die Durchflußzeit des Öles etwa 0,002 sec. beträgt.

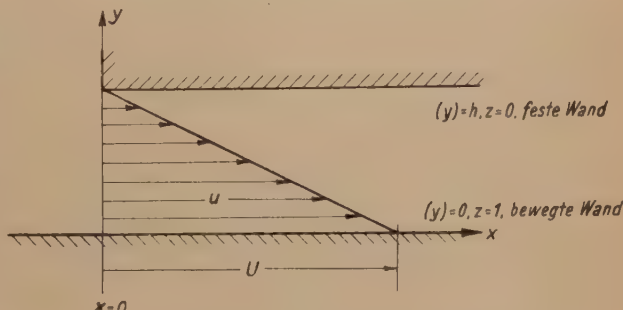


Bild 1. Schmierspalt und Geschwindigkeitsverteilung

Vom Verfasser war der ebene Schmierkeil mit ganz in Öl verbleibender Wärme unter der Annahme einer mittleren Temperatur und demnach mittleren Zähigkeit quer zur Schicht behandelt worden, vgl. F. H. 386, S. 19/23¹⁾. Prüft man die Zulässigkeit dieser Annahme und betrachtet dazu einen parallelen Schmierspalt nach Bild 1, so ergibt sich unter Vernachlässigung der Wärmeleitung aus der weiter unten folgenden Gl. (5) an der festen Wand ein unendlich großer Temperaturgradient. Herr Blok in Delft wirft daher mit Recht die Frage auf, ob man bei der Behandlung der nicht isothermen Strömung mit Mittelwerten der Temperatur quer zur Schicht rechnen darf und stellt folgende Aufgabe:

„Mit den in F. H. 425²⁾ verwendeten Methoden ist die Temperaturverteilung einer Strömung zwischen athermanen Wänden unter den Bedingungen von Bild 1 zu bestimmen und festzustellen, ob der Mittelwert der Temperatur quer zur Schicht endlich bleibt, und wenn ja, ob dieser Mittelwert gegen denjenigen konvergiert, den man aus der Näherungsrechnung im Sinne von F. H. 386 erhält, bei der die Strömungsgeschwindigkeit und die Temperatur vorher gemittelt wurde. Dieses Ergebnis würde für die Zulässigkeit des im F. H. 386 benutzten Verfahrens entscheidend sein.“

Für den Fall einer Flüssigkeit, deren Zähigkeit von der Temperatur unabhängig ist, läßt sich das Problem vollständig lösen. Er stellt den Grenzfall der Temperaturerhöhung dar; für

¹⁾ F. H. 386 = VDI-Forschungsheft 386, Beiträge zur Kenntnis der Gleitlagerreibung; Berlin 1937.

²⁾ F. H. 425 = VDI-Forschungsheft 425, Der Übergang der Reibungswärme von Lagern aus der Schmierschicht in die Gleitflächen; Düsseldorf 1949.

Flüssigkeiten, deren Viskosität mit zunehmender Temperatur abnimmt, werden nicht so hohe Temperaturen erreicht.

2. Grundgleichung und Partikularintegral

Als Ausgang wird die Energiegleichung für die Strömung einer zähen Flüssigkeit [F.H.425, S.4, Gl.(2)] genommen, wobei die wirklichen Werte der Koordinaten (x) , (y) , Geschwindigkeiten (u) und Temperaturen (ϑ) durch Einklammern gekennzeichnet sind. Unter Vernachlässigung der Wärmeleitung in der X -Richtung lautet die Gleichung [ebda. S. 6, Gl.(10)]:

$$\gamma c(u) \frac{\partial(\vartheta)}{\partial(x)} = \lambda \left[\frac{\partial^2(\vartheta)}{\partial(y)^2} \right] + \eta \left[\frac{\partial(u)}{\partial(y)} \right]^2 \quad (1)$$

mit dem spezifischen Gewicht γ , im technischen Maßsystem in kg/m^3 , der spezifischen Wärme c in $\text{mkg/kg}^\circ\text{C}$, der Zähigkeit η in kgs./m^2 und der Wärmeleitfähigkeit λ in $\text{mkg/m.s}^\circ\text{C}$.

Es werden dimensionslose Koordinaten x , y durch $(x) = hx$ und $(y) = hy$ eingeführt, und die Geschwindigkeitsverteilung linear in der Form der Couette-Strömung

$$(u) = U \left(1 - \frac{(y)}{h} \right) = U(1 - y), \quad \text{also:} \quad \frac{\partial(u)}{\partial(y)} = -\frac{U}{h}$$

angenommen, ferner die Zähigkeit $\eta = \eta_0$ als konstant und von (ϑ) unabhängig vorausgesetzt. Mit der Beziehung

$$(\vartheta) = \vartheta \frac{\eta_0 \cdot U^2}{\lambda} \quad (2)$$

wird die dimensionslose Größe ϑ statt der Temperatur (ϑ) eingeführt; nimmt man noch die Pécletsche Zahl

$$Pe = \frac{Uh\gamma c}{\lambda} \quad (3)$$

hinzu, so wird nach Einführung dieser Größen die Gl. (1)

$$Pe(1 - y) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + 1 \quad (4)$$

oder mit $z = 1 - y$

$$Pe z \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + 1 \quad (5)$$

Die Randbedingungen sind $\partial(\vartheta)/\partial(y) = 0$ für $(y) = 0$ und $(y) = h$, oder

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \quad \text{für} \quad z = 0 \quad \text{und} \quad z = 1,$$

und die Anfangsbedingung $\vartheta = 0$ für $x = 0$.

Es läßt sich ein Partikularintegral ϑ_∞ in der Form

$$\vartheta_\infty = Ax + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3$$

angeben; die Randbedingungen und die Differentialgleichung (5) liefern

$$A = \frac{2}{Pe}, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{3},$$

also

$$\vartheta_\infty = \frac{2x}{Pe} + c_0 - \frac{1}{6}(3z^2 - 2z^3) \quad (6)$$

Die Konstante c_0 wird aus den Anfangsbedingungen bestimmt, für $x=0$ soll $\vartheta=0$ sein. Für die Partikularlösung ist das nicht möglich. Fordert man, vorbehaltlich einer späteren Kontrolle, daß für $x=0$ oder Mittelwert $\bar{\vartheta}_\infty=0$ werden soll, so wird [vgl. F.H.425, S.10, Gl.(35)] wegen

$$\bar{\vartheta}_\infty = 2 \int_0^1 z \vartheta_\infty dz = \frac{2x}{Pe} + c_0 - \frac{7}{60} \quad \text{hier} \quad c_0 = \frac{7}{60},$$

also ist

$$\vartheta_\infty = \frac{2x}{Pe} + \frac{1}{6} \left(\frac{7}{10} - 3z^2 + 2z^3 \right) \quad (6a)$$

Um von dieser Annahme unabhängig zu sein, wird die endgültige Bestimmung von C_0 erst in Ziffer 4 durchgeführt und vorerst mit Gl.(6) gearbeitet.

3. Die Lösung der Differentialgliederung

Die Lösung von Gl.(5) wird in der Form $\vartheta = \vartheta_\infty + \vartheta_{hom}$ gesucht, wobei ϑ_{hom} die allgemeine Lösung der zu Gl.(5) gehörenden homogenen Gleichung

$$Pe z \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \quad \dots \quad (7)$$

bedeutet. Der Ansatz $\vartheta_{hom} = C \psi(z) e^{-\frac{m^2 x}{Pe}}$, führt auf die Gleichung

$$\psi'' + m^2 z \psi = 0 \quad \dots \quad (8)$$

deren vollständige Lösung durch

$$\psi = z^{1/2} \left[c_1 J_{1/3} \left(\frac{2}{3} m z^{3/2} \right) + c_2 J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} m z^{3/2} \right) \right] \quad \dots \quad (9)$$

gegeben ist [vgl. F.H.425, S. 7, Gl.(22)].

Die Randbedingungen fordern $d\psi/dz=0$ für $z=0$ und $z=1$; durch Differentiation von Gl.(7) folgt unter Beachtung der für Besselsche Funktionen geltenden Beziehungen

$$\frac{d\psi}{dz} = m z \left[c_1 J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} m z^{3/2} \right) - c_2 J_{2/3} \left(\frac{2}{3} m z^{3/2} \right) \right] \quad \dots \quad (10).$$

Nun ist $J_{2/3}(0)=0$, aber $J_{-2/3}(0)=\infty$; daher kann das Produkt $z J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} m z^{3/2} \right)$ für $z=0$ einen endlichen Wert haben. Das ist auch der Fall, wie aus der für Besselsche Funktionen allgemein gültigen Entwicklung

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left[1 - \frac{x^2}{2(2\nu+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2\nu+2)(2\nu+4)} - \dots \right]$$

mit $x = \frac{2}{3} m z^{3/2}$ hervorgeht, es folgt

$$\left[m c_1 z J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} m z^{3/2} \right) \right]_{x=0} = \frac{\sqrt[3]{9m}}{\Gamma(1/3)} c_1,$$

also eine Konstante; daher muß $C_1=0$ sein. Für $z=1$ folgt aus Gl.(10):

$$\frac{d\psi}{dz} = -m c_2 J_{2/3} \left(\frac{2}{3} m \right) = 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $m = \frac{3}{2} m_\mu$ gesetzt wird, wobei mit m_μ die Nullstellen der Funktion $J_{2/3}(x)$ bezeichnet werden. Die Lösung der homogenen Gleichung wird also

$$\vartheta_{hom} = \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu z^{1/2} J_{-1/3}(m_\mu z^{3/2}) e^{-\left(\frac{3}{2} m_\mu\right)^2 \frac{x}{Pe}}$$

und die allgemeine Lösung der Gl.(5), $\vartheta = \vartheta_\infty + \vartheta_{hom}$

$$\vartheta = \frac{2x}{Pe} - \frac{1}{6} (3z^2 - 2z^3) + c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu z^{1/2} J_{-1/3}(m_\mu z^{3/2}) e^{-\left(\frac{3}{2} m_\mu\right)^2 \frac{x}{Pe}} \quad \dots \quad (11).$$

4. Die Erfüllung der Anfangsbedingung

Zur Erfüllung der Bedingung $\vartheta = 0$ für $x = 0$ muß

$$(3z^2 - 2z^3) - 6c_0 = 6 \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu z^{1/2} J_{-1/3}(m_\mu z^{3/2}) \quad \dots \quad (12)$$

sein, woraus c_0 und die C_μ zu bestimmen sind. Zu diesem Zweck wird die linke Seite der Gl.(12) in eine nach Besselschen Funktionen fortschreitende Reihe entwickelt (vgl. F.H.425, S. 8.). Es ist also diese Gleichung mit z und der Eigenfunktion, also mit $z^{3/2} J_{-1/3}(m_i z^{3/2})$ für

$i = 1, 2, \dots \infty$ zu multiplizieren und über z von 0 bis 1 zu integrieren. Dabei treten folgende Integrale auf, die mit $m_i z^{3/2} = \varrho$, $z = \left(\frac{\varrho}{m_i}\right)^{2/3}$, $dz = \frac{2}{3 m_i} \left(\frac{\varrho}{m_i}\right)^{-1/3} d\varrho$ auf die lineare Veränderliche im Argument der Besselschen Funktion umgeformt werden:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 3 z^{7/2} J_{-1/3}(m_i z^{3/2}) dz &= \frac{2}{m_i^3} \int_0^{m_i} \varrho^2 J_{-1/3}(\varrho) d\varrho = M_i \\ \int_0^1 2 z^{9/2} J_{-1/3}(m_i z^{3/2}) dz &= \frac{4}{3 m_i^{11/3}} \int_0^{m_i} \varrho^{8/3} J_{-1/3}(\varrho) d\varrho = N_i \\ \int_0^1 6 c_0 z^{3/2} J_{-1/3}(m_i z^{3/2}) dz &= 6 c_0 [z^{3/2} J_{2/3}(m_i z)]_0^1 = 0 \\ \int_0^1 6 C_i z^2 J_{-1/3}(m_\mu z^{3/2}) J_{-1/3}(m_i z^{3/2}) dz &= 0 \quad \text{für } \mu \neq i \\ \int_0^1 6 z^2 [J_{-1/3}(m_i z^{3/2})]^2 dz &= \frac{4}{m_i^2} \int_0^{m_i} \varrho [J_{-1/3}(\varrho)]^2 d\varrho = 2 [J_{-1/3}(m_i)]^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (13).$$

Damit ergibt sich für C_μ

$$C_\mu = \frac{M_\mu - N_\mu}{2 [J_{-1/3}(m_\mu)]^2} \dots \dots \dots (14).$$

Die Integrale M_μ und N_μ lassen sich nicht analytisch ausdrücken, sie wurden durch numerische Quadratur ermittelt (vgl. Ziffer 5).

Zur Bestimmung der Konstanten c_0 muß Gl.(12) mit z und der zur ersten Nullstelle $m_0=0$ gehörigen Eigenfunktion $\psi_0=1$ multipliziert und dann integriert werden, wie bei P. Schafheitlin, Theorie der Besselschen Funktionen, Leipzig und Berlin, S. 73/74 näher ausgeführt ist.

Bei der Integration der mit z multiplizierten Gl.(12) fällt die rechte Seite fort, weil alle Integrale vom Typ der Gl.(13) sind. Die Auswertung der linken Seite liefert $c_0=7/60$; das ist derselbe Wert, der durch die Überlegung der Mittelwertbildung beim Partikularintegral unter Ziffer 2 gefunden wurde. Außerdem wird für die Mittelwertbildung und die Bestimmung von c_0 in der Entwicklung in die Fourier-Bessel-Reihe dasselbe Integral verwendet, obwohl es sich um zwei ganz verschiedene Vorgänge handelt.

Jetzt sind alle verfügbaren Konstanten bis auf die zahlenmäßige Berechnung bestimmt, die Lösung erfüllt die Differentialgleichung und die Rand- und Anfangsbedingungen, die Funktionenfolge konvergiert gleichmäßig gegen die gesuchte Lösung. Näheres darüber vgl. F. H. 425, S. 9.

5. Die zahlenmäßige Auswertung

Für die Berechnung der Lösung wurden die Tafeln von Watson, Bessel-Functions, Oxford 1922, benutzt, die dort tabulierte Funktion $Y_{1/3}$ mußte auf $J_{-1/3}$ umgerechnet werden. Die erste Nullstelle von $J_{2/3}$ ist von Emde angegeben, Z. math. Physik (3) Bd. 24 (1916) S. 239/250 mit $m_1=3,375\ 6106$. Die weiteren Nullstellen konnten mit den üblichen Näherungsformeln auf fünf Dezimalen bestimmt werden. Ebenso wurden die Werte von $J_{1/3}(m_\mu)$ durch Interpolation berechnet. Für die Fourier-Bessel-Entwicklung erwiesen sich die ersten fünf

Tabelle 1. Zahlenwerte für die fünf ersten Nullstellen

μ	1	2	3	4	5
m_μ	3,3755	6,5303	9,6766	12,8206	15,9637
M_μ	-0,15 072	0,013 310	-0,009 296	0,002 7802	-0,002 5301
N_μ	-0,10 123	0,019 503	-0,007 301	0,003 6142	-0,002 0894
$J_{-1/3}(m_\mu)$	-0,43 260	0,31 189	-0,25 636	0,22 277	-0,19 965
$-C_\mu$	0,1322	0,03 183	0,01 518	0,008 402	0,005 529
$(\frac{3}{2} m_\mu)^2$	25,637	95,949	210,682	369,828	573,389

Glieder wegen der stark zunehmenden Argumente der Exponentialfunktion als ausreichend. Die wichtigsten Zahlenwerte sind in Tabelle 1 zusammengefaßt. Der Vollständigkeit halber soll auch noch die Lösung wiedergegeben werden:

$$\vartheta = \frac{2x}{Pe} + \frac{1}{6} \left(\frac{7}{10} - 3z^2 + 2z^3 \right) - 0,1322 \sqrt{z} J_{-1/3} (3,376 \sqrt{z^3}) e^{-25,64 \frac{x}{Pe}} \left. \begin{aligned} &- 0,03183 \sqrt{z} J_{-1/3} (6,530 \sqrt{z^3}) e^{-95,95 \frac{x}{Pe}} \\ &- 0,01518 \sqrt{z} J_{-1/3} (9,677 \sqrt{z^3}) e^{-210,7 \frac{x}{Pe}} \\ &- 0,008402 \sqrt{z} J_{-1/3} (12,82 \sqrt{z^3}) e^{-369,3 \frac{x}{Pe}} \\ &- 0,005529 \sqrt{z} J_{-1/3} (15,96 \sqrt{z^3}) e^{-573,4 \frac{x}{Pe}} \dots \end{aligned} \right\} \dots (15).$$

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung sind in Bild 2 und 3 in Parameterdarstellung wiedergegeben. Für die in F. H. 425 gerechneten Beispiele mit $U = 20, 40$ und 60 m/s. , $h = 0,1 \text{ mm}$

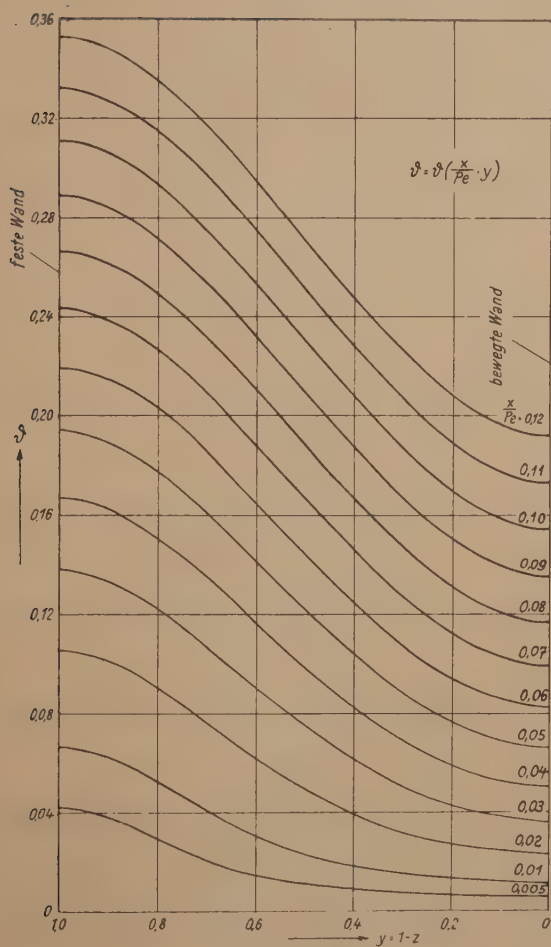


Bild 2

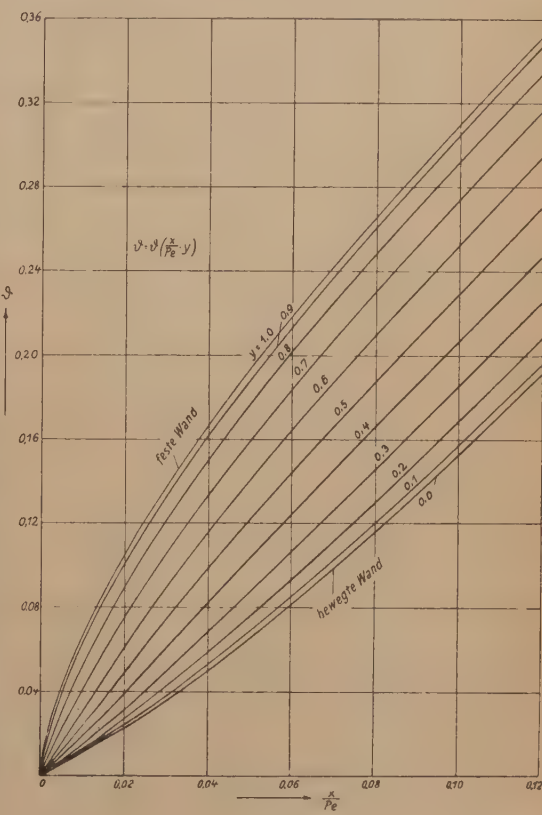
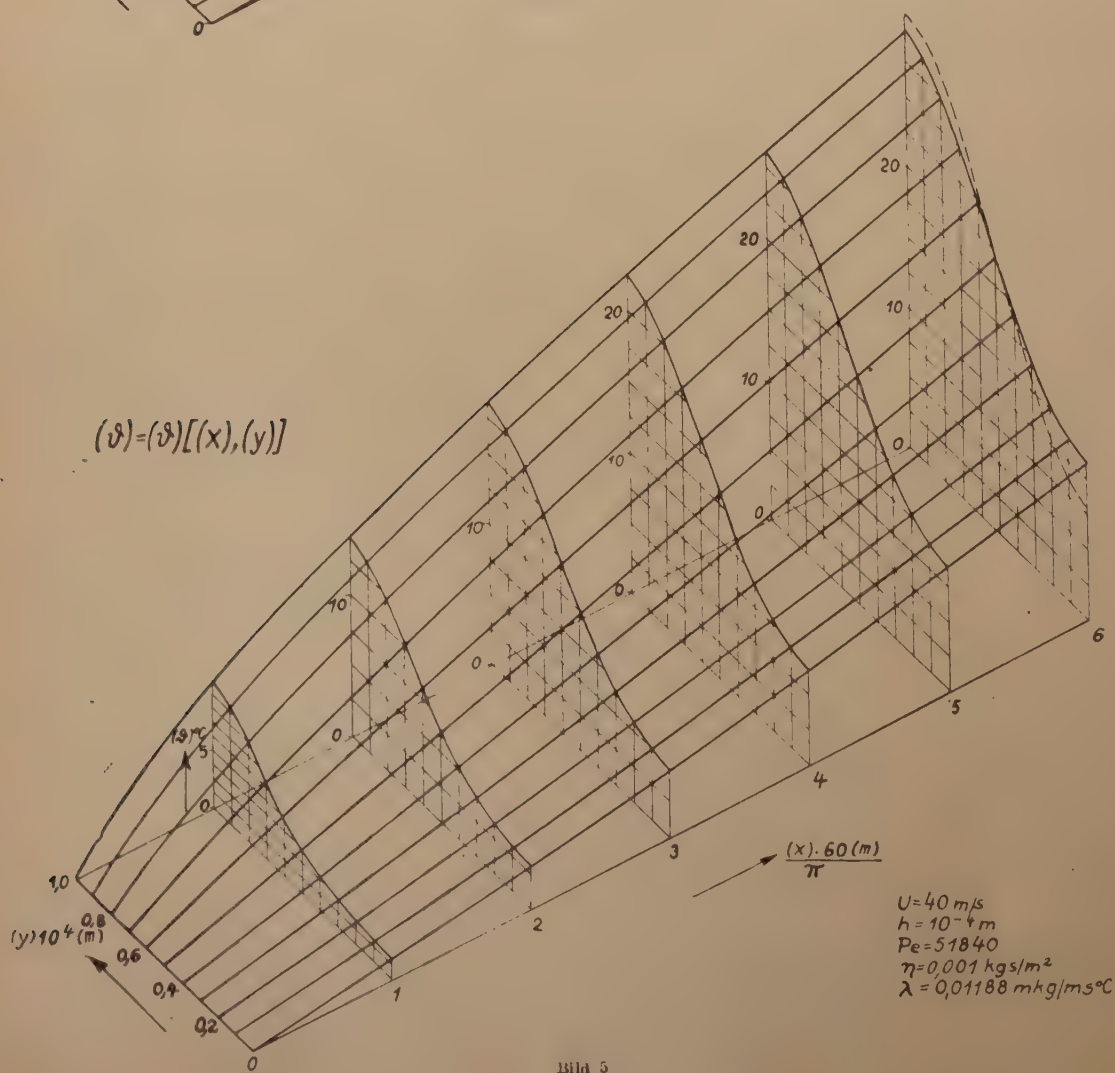
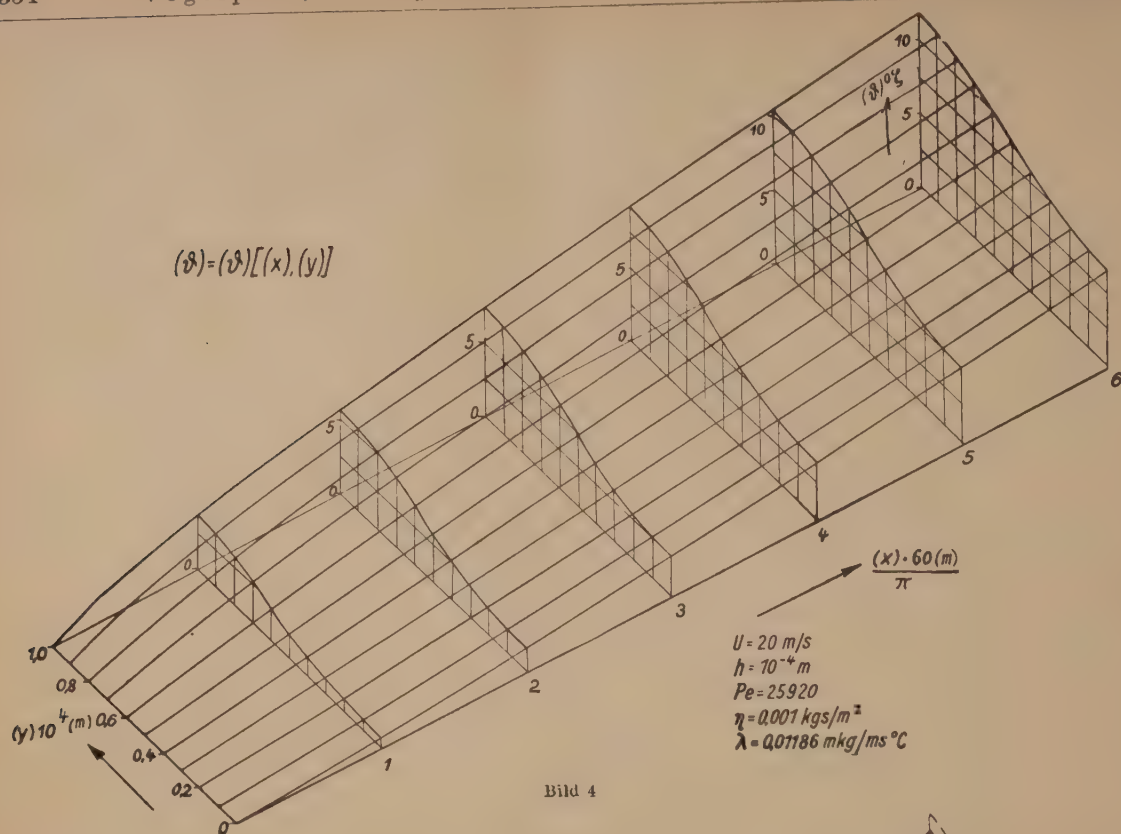


Bild 3

$= 10^{-4} \text{ m}$ und einer Spaltlänge von $0,1\pi \text{ cm}$, entsprechend dem halben Umfang eines Zapfens von 200 mm Dmr. sind in Bild 4, 5 und 6 die wirklichen Temperaturen ermittelt und perspektivisch wiedergegeben. Die Péclet'schen Zahlen sind 25920, 51840 und 77760; sie gehen hier als Zahlenwerte ein; wegen des fehlenden Wärmeüberganges kommt ihre physikalische Bedeutung nur bedingt zur Geltung.

Bemerkenswert ist für den Vorgang, daß das von der bewegten Fläche mitgenommene kalte Öl bis ins Unendliche hinein eine niedrigere Temperatur an der bewegten Wand mit konstanter Differenz gegenüber der festen Wand verursacht. In Bild 5 und 6 stellen die gestrichelten Kurven in der letzten Temperaturverteilung rechts diesen Verlauf dar, der durch das Partikularintegral nach dem zweiten Glied der rechten Seite von Gl.(6a) gegeben ist. In Bild 4 ist der Unterschied gegenüber dem bereits erreichten Temperaturverlauf so gering, daß er nicht mehr in Erscheinung tritt.



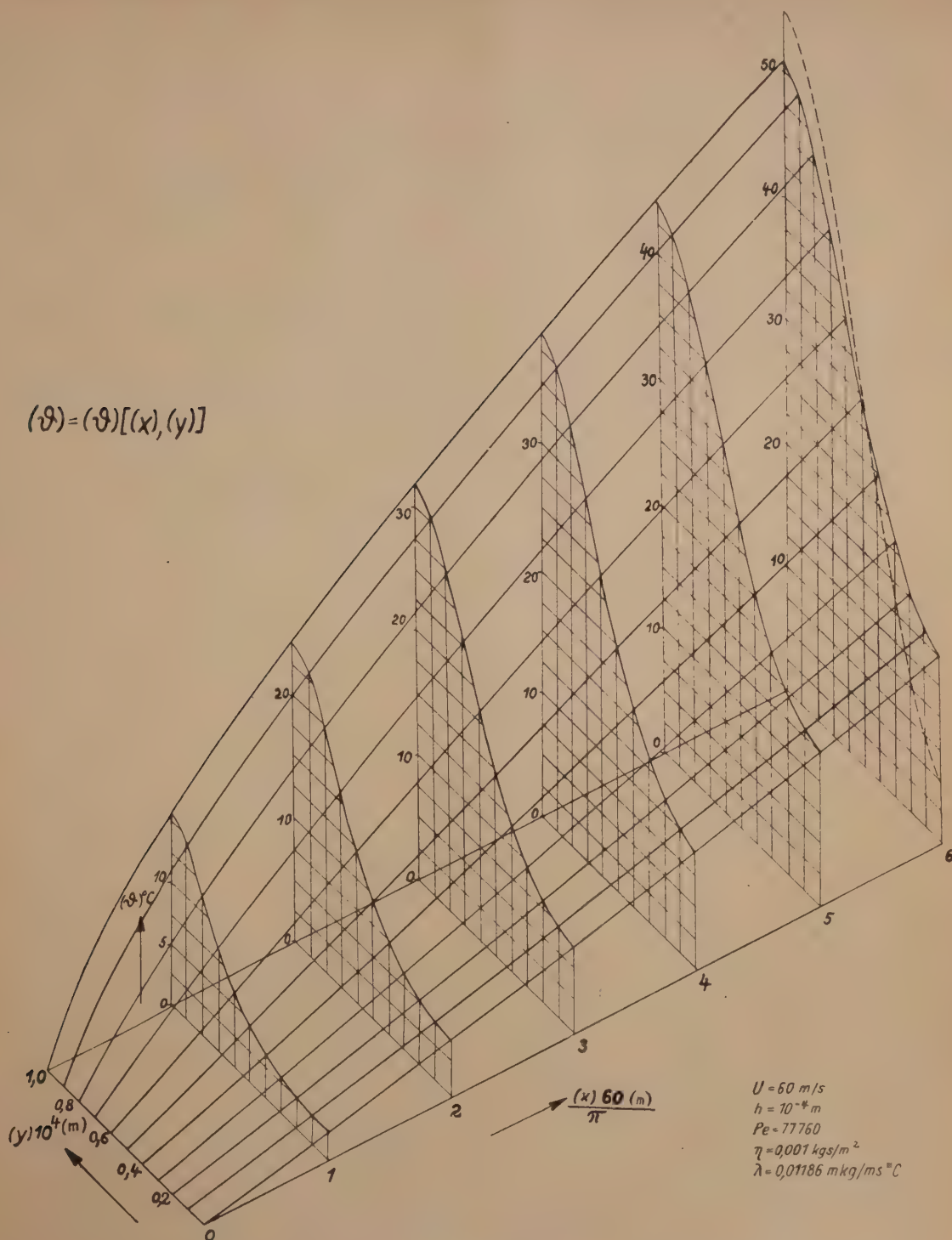


Bild 6

6. Die mittleren Temperaturen

Mittelwerte für die Temperaturverteilung (ϑ) in strömenden Flüssigkeiten mit der Geschwindigkeitsverteilung (u) werden (vgl. F. H. 425, S. 10) nach Nusselt durch

$$(\bar{\vartheta}) = \frac{\int_0^h (u) (\vartheta) d(y)}{\int_0^h (u) d(y)}$$

gebildet. Nach Einführung der dimensionslosen Größen y bzw. z und ϑ ergibt sich hieraus für ϑ die schon in Ziffer 2 genannte Formel:

$$\bar{\vartheta} = 2 \int_0^1 z \vartheta dz.$$

Wird Gl.(11) mit $c_0 = 7/60$ mit $2z$ multipliziert und von 0 bis 1 integriert, so fallen alle Glieder mit Ausnahme von $2x/Pe$ weg, weil die Integrale mit $J_{-1/3}$ die Form der Gl.(13) haben und c_0 so bestimmt war, daß die Glieder mit z^2 und z^3 ausgeglichen werden. Die Mittelwerte an der Stelle x sind also

$$\bar{\vartheta} = \frac{2x}{Pe} \quad \text{oder} \quad (\bar{\vartheta}) = \bar{\vartheta} \frac{\eta_0 U^2}{\lambda} = \frac{2(x) \eta_0 U}{h^2 \gamma c} \dots \dots \dots (16).$$

Das ist aber der gleiche Wert, den man aus Gl.(1) erhält, wenn der Einfluß der Wärmeleitung, also das Glied mit λ vernachlässigt und für (u) der Mittelwert $U/2$ eingesetzt wird. Die dimensionslose Form für ϑ folgt entsprechend aus Gl.(5) mit $\bar{z} = 1/2$.

Damit ist gezeigt, daß für die Couette-Strömung und eine Flüssigkeit, deren Zähigkeit nicht von der Temperatur abhängt, für die Berechnung der Mittelwerte der Temperatur die Strömungsgeschwindigkeiten quer zur Schicht gemittelt werden dürfen; ebenso darf dazu die Wärmeleitung quer zur Schicht vernachlässigt werden.

Offen ist noch, ob diese Beziehungen bei anderen Geschwindigkeitsverteilungen, also bei der Hagen-Poiseuille-Strömung und bei mit der Temperatur veränderlicher Zähigkeit auch gültig bleiben. Diese Frage muß eine besondere Untersuchung entscheiden. In wirklichen Schmier-schichten bestimmt aber der Couette-Anteil weitgehend den Charakter der Strömung, ebenso wird die veränderliche Zähigkeit in erster Linie die Zahlenwerte hinsichtlich der Höhe der erreichten Temperaturen beeinflussen, so daß an dem grundsätzlichen Ergebnis kaum etwas geändert werden dürfte.

Für die Durchführung der Zahlenrechnungen bin ich Herrn Dipl.-Physiker U. Rost und Frau E. Rost zu besonderem Dank verpflichtet.

Eingegangen am 11. Dezember 1950.

Über die Fehlerabschätzung beim Extrapolationsverfahren von Adams

I. Gleichungen 1. Ordnung

Von P. Matthieu in Zürich

Es wird eine neue Methode der Fehlerabschätzung entwickelt, die mit größter Leichtigkeit im Anschluß an die erfolgte Integration einer Gleichung vorgenommen werden kann. Die Fehlerschranke beträgt im allgemeinen etwa das Anderthalbfache des wirklichen Fehlers. Die Methode wird für die beiden wichtigsten Formen des Adamsschen Verfahrens zur Integration von Gleichungen erster Ordnung näher ausgeführt.

A new method of estimating the error is presented that can be very easily performed as soon as the equation is integrated. The bounds of the error are generally about 1,5 times larger than the real error. The method is explained in the detail for the two most important forms of the method of Adams used for the integration of differential equations of the first order.

Une méthode nouvelle pour l'estimation d'erreur est développée, applicable avec grande facilité, après que l'équation fut intégrée. La limite d'erreur est en général le sescuple, à peu près, de l'erreur réel. La méthode est exposée d'une manière détaillée pour les deux formes les plus importantes du procédé d'Adams d'intégration d'équations du premier ordre.

Разрабатывается новый метод оценки погрешности, который может быть с большой легкостью применен после интегрирования уравнения. Предел погрешности обычно приблизительно два раза превышает действительную погрешность. Предлагаемый метод излагается более подробно для двух основных форм интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка по способу Адамса.

1. Einleitung

Es ist heute nicht mehr bestritten, daß unter allen Methoden zur angenäherten numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen das Extrapolationsverfahren von Adams das weit-aus bequemste und vorteilhafteste ist. Das Verfahren kann dabei in verschiedenen Gestalten durchgeführt werden. Über diese ist in der Literatur so häufig berichtet worden, daß hier nicht mehr näher darauf eingegangen werden soll¹⁾. Neuerdings spielt das Verfahren von Adams

¹⁾ Vgl. z. B. E. Kamke: Differentialgleichungen, 2. Aufl. Leipzig 1943, S. 143—148; oder Fr. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis, 2. Aufl. Berlin 1950, S. 348—361.

wiederum eine wichtige Rolle, weil es diejenige Methode ist, nach welcher Differentialgleichungen vorzugsweise vermittelt der großen digitalen Rechenmaschinen gelöst werden. Auch die vorliegenden Untersuchungen können unmittelbar und sogar besonders gut auf den Fall der maschinellen Integration angewandt werden, weil die dabei verwendeten Intervalle meist sehr klein sind.

Wie bei jeder Näherungsmethode bildet naturgemäß auch beim Extrapolationsverfahren die Frage der Fehlerschätzung ein wichtiges Problem. Dieses ist erst verhältnismäßig spät in Angriff genommen worden. Erst seit etwa zwei Jahrzehnten ist von verschiedenen berufenen Autoren eine Reihe von Arbeiten über diesen Gegenstand veröffentlicht worden, die größtenteils in dieser Zeitschrift erschienen sind²⁾. Indessen ist zu sagen, daß die in diesen Arbeiten entwickelten Methoden, so wertvoll sie auch sind, bei der praktischen Durchführung doch große Schwierigkeiten bereiten. Außerdem ist der wirkliche Fehler oft viel kleiner als die durch die Abschätzung gegebene Schranke. Aus diesen Gründen soll hier eine andere Methode der Fehlerabschätzung entwickelt werden, die sich in diesen Hinsichten günstiger verhält. Diese ist ohne wesentlichen Unterschied auf alle Differentialgleichungen anwendbar. In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns jedoch auf den Fall der Gleichungen erster Ordnung, während diejenigen höherer Ordnung in einer späteren Arbeit behandelt werden sollen.

2. Prinzip der Lösung

Dem hier verfolgten Gedankengange liegt ein allgemeines Prinzip zugrunde, das nicht in unmittelbarem Zusammenhange mit dem Extrapolationsverfahren steht, das sich jedoch in besonders sinngemäßer Weise auf das letztere anwenden läßt. Es sei eine reelle Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

gegeben und außerdem als Anfangsbedingung eine Beziehung

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

wobei x_0 und y_0 gegebene Zahlwerte sind. Gesucht sei die durch (1) und (2) bestimmte Lösung $y(x)$ für $x \geq x_0$. Von der Funktion $f(x, y)$ setzen wir zunächst nur voraus, daß sie im Rechteck

$$x_0 \leq x \leq x_0 + a \quad |y - y_0| \leq b \quad (3)$$

stetig und nach y stetig differenzierbar sei. Ferner gelte innerhalb des Rechtecks (3):

$$|f(x, y)| \leq K \quad (4)$$

und es bezeichne k die kleinere der beiden Größen a und b/K . Dann verläuft $y(x)$ für $x_0 \leq x \leq x_0 + k$ sicher innerhalb des Dreiecks

$$x_0 \leq x \leq x_0 + k \quad |y - y_0| \leq K(x - x_0) \quad (5)$$

Im Unterschied zur exakten Lösung $y(x)$ bezeichne $y^*(x)$ eine irgendwie erhaltene Näherungslösung, von der wir nur voraussetzen, daß sie der Anfangsbedingung (2) genüge, innerhalb des Dreiecks (5) verlaufe und stetig sowie stückweise stetig differenzierbar sei. Setzen wir ferner

$$y(x) = y^*(x) + \delta(x) \quad (6)$$

wobei $\delta(x)$ den unbekannten Fehler der Näherung $y^*(x)$ bezeichnet, so muß (6) der Gl. (1) genügen, was auf die Beziehung

$$y^{*'} + \delta' = f(x, y^* + \delta) \quad (7)$$

führt. Der Fehler $\delta(x)$ genügt dabei gemäß den gemachten Voraussetzungen über $y^*(x)$ der Beziehung

$$\delta(x_0) = 0 \quad (8)$$

Die rechte Seite von (7) entwickeln wir nach Taylor und erhalten bei Verwendung der Lagrange'schen Form des Restgliedes in leicht verständlicher Schreibweise

$$y^{*'} + \delta' = f(x, y^*) + \delta \frac{\partial f}{\partial y}(x, y^* + \vartheta \delta) \quad (9)$$

$\vartheta(x)$ ist dabei eine Funktion von x , von der nur bekannt ist, daß ihre Funktionswerte zwischen den Grenzen 0 und 1 liegen. Setzen wir zur Abkürzung

$$p(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y^*), \quad p_1(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y^* + \vartheta \delta), \quad q(x) = f(x, y^*) - y^{*'} \quad (10)$$

²⁾ Es handelt sich vor allem um folgende Arbeiten: Mises, R. v.: Zur numerischen Integration von Differentialgleichungen. Z. ang. Math. Mech., Bd. 10. — Schulz, G.: Interpolationsverfahren zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. ang. Math. Mech., Bd. 12. — Tollmien, W.: Über die Fehlerabschätzung beim Adamsschen Verfahren zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. Z. ang. Math. Mech., Bd. 18. — Fricke, A.: Über die Fehlerabschätzung des Adamsschen Verfahrens zur Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung. Z. ang. Math. Mech., Bd. 29.

so schreibt sich (9) in der Form

$$\delta' + p_1 \delta = q \quad (11).$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung für δ , gemäß welcher δ unter Berücksichtigung von (8) in der Gestalt

$$\delta(x) = e^{-\int_{x_0}^x p_1 dx} \int_{x_0}^x q e^{\int_{x_0}^x p_1 dx} dx \quad (12)$$

dargestellt werden kann. Hierbei ist jedoch zu bemerken, daß der Koeffizient $p_1(x)$ nicht genau bekannt ist, weil in ihm die unbekannten Funktionen $\delta(x)$ und $\vartheta(x)$ auftreten. Hingegen läßt sich (12) leicht abschätzen. Besteht im Dreieck (5) die Ungleichung

$$m \leq -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \leq M \quad (13)$$

so ergibt sich gemäß (12) für $x_0 \leq x \leq x_0 + k$ sofort

$$|\delta(x)| \leq e^{-m(x-x_0)} \int_{x_0}^x |q| e^{M(x-x_0)} dx \quad (14).$$

Falls weiterhin im obigen Intervall die Ungleichung

$$|q| \leq L \quad (15)$$

besteht, folgt aus (14):

$$|\delta(x)| \leq \frac{L}{M} e^{(M-m)(x-x_0)} \quad (16).$$

Die Ungleichungen (14) und (16) lassen sich in ganz ähnlicher Weise praktisch verwerten wie die Abschätzungsformeln in den unter 2) genannten Arbeiten. In vielen speziellen Fällen lassen sie sich noch verschärfen und vereinfachen. Falls z.B. $m \geq 0$, also $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ im Dreieck (5) überall negativ ist, ist der Ausdruck

$$e^{\int_{x_0}^x p_1(x) dx} \quad (17)$$

eine monoton wachsende Funktion, und aus (12) ergibt sich sofort

$$|\delta(x)| \leq \int_{x_0}^x |q| dx \leq L(x-x_0) \quad (18).$$

Ganz ähnlich ist im Falle $M \leq 0$ (17) eine monoton abnehmende Funktion, für die die Beziehung

$$e^{\int_{x_0}^x p_1(x) dx} \geq e^{m(x-x_0)} \quad (19)$$

besteht. Daraus folgt gemäß (12) sofort

$$|\delta(x)| \leq e^{-m(x-x_0)} \int_{x_0}^x |q| dx \leq L(x-x_0) e^{-m(x-x_0)} \quad (20).$$

Alle vorstehenden Formeln beziehen sich auf das Intervall $x_0 \leq x \leq x_0 + k$.

Die eigentliche praktische Bedeutung dieser Betrachtungen beruht nun aber darauf, daß in allen konkreten Fällen $\delta(x)$ stets so klein ist, daß man in den Formeln (11) und (12) $p_1(x)$ durch die bekannte Funktion $p(x)$ ersetzen kann. Das kommt darauf heraus, daß man in der Taylorschen Entwicklung von (7) nur noch das lineare Glied in δ berücksichtigt, während man die höheren Glieder vernachlässigt. Auch kann aus der exakten Darstellung (12) stets sehr leicht abgeschätzt werden, welche Auswirkung die Ersetzung von p_1 durch p auf die Größe des Fehlers hat. Dazu sind zwei Dinge erforderlich. Erstens ist die ungefähre Größe des Fehlers zu schätzen; zweitens ist abzuschätzen, welchen Einfluß die Ersetzung von p_1 durch p in (12) hat. Damit erhalten wir nun an Stelle von (11) die Gleichung

$$\delta' + p \delta = q \quad (21).$$

Wir bezeichnen sie im folgenden als die zu (1) und $y^*(x)$ gehörende Fehlergleichung. Aus ihr ergibt sich der Fehler $\delta(x)$ außerordentlich angenähert in der Form

$$\delta(x) = e^{-\int_{x_0}^x p dx} \int_{x_0}^x q e^{\int_{x_0}^x p dx} dx \quad (22).$$

3. Anwendung auf das Verfahren von Adams bei unmittelbarer Extrapolation

Bei der Anwendung auf das Verfahren von Adams ist zu beachten, daß $y^*(x)$ sich aus lauter ganzen rationalen Funktionen der gleichen Ordnung zusammensetzt. Für jedes Intervall wird ja eine neue derartige Funktion gebildet. An den bisherigen Überlegungen kann dies jedoch nichts ändern. Wir machen vorerst über die Funktion $f(x, y)$ noch die zusätzliche Annahme, daß sie sowie ihre sämtlichen partiellen Ableitungen bis zur 6. Ordnung stetig und nach jeder Veränderlichen stetig differenzierbar seien³⁾. Die weiteren Entwicklungen sind nun je nach der verwendeten Gestalt des Adamsschen Verfahrens verschieden.

Wir beginnen mit dem Fall der unmittelbaren Extrapolation und entwickeln die sich ergebenden Methoden am Beispiel der sehr häufig verwendeten Extrapolation vermittelt Polynomen vom vierten Grade. Zur Durchführung des Verfahrens ist es zunächst nötig, das Integrationsintervall, ausgehend von $x = x_0$, in eine Anzahl gleicher Teilintervalle einzuteilen. Die Begrenzungspunkte seien mit x_0, x_1, x_2, \dots bezeichnet und die gemeinsame Intervalllänge mit h . Ferner ist es, damit das eigentliche Verfahren in Gang gebracht werden kann, nötig, die angenäherte Lösung $y^*(x)$ für die drei ersten Intervalle, insbesondere für die vier Werte x_0, x_1, x_2, x_3 auf irgendeine Weise möglichst genau vorauszubestimmen. Wir bezeichnen diese Funktionswerte durch $y^*(x_n) = y_n^*$ ($0 \leq n \leq 3$; $y_0^* = y_0$) sowie ferner die sich daraus ergebenden Größen $f(x_n, y_n^*)$ durch f_n^* . Dann stellt man in bekannter Weise¹⁾ das Differenzenschema:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} x_0 & y_0^* & f_0^* & & & & \\ & x_1 & y_1^* & f_1^* & \bar{\Delta} f_1^* & & \\ & & x_2 & y_2^* & f_2^* & \bar{\Delta}^2 f_2^* & \\ & & & x_3 & y_3^* & f_3^* & \bar{\Delta}^3 f_3^* \\ & & & & x_4 & y_4^* & f_4^* & \bar{\Delta}^4 f_4^* \\ & & & & & x_5 & y_5^* & f_5^* & \bar{\Delta}^5 f_5^* \end{array} \right\} \dots (23)$$

auf⁴⁾. Die Größen y_n^* und f_n^* haben dabei für $n > 3$ die gleiche Bedeutung wie für $n \leq 3$. Der Extrapolationsprozeß besteht darin, daß man, nachdem $y^*(x)$ bereits in den ersten $n-1$ Intervallen ($n > 3$) bekannt ist, zunächst mit

$$u_{n-1} = \frac{x - x_{n-1}}{h} \dots \dots \dots (24)$$

das Interpolationspolynom

$$\left. \begin{array}{l} F_{n-1}(x) = f_{n-1}^* + \frac{\bar{\Delta} f_{n-1}^*}{1!} u_{n-1} + \frac{\bar{\Delta}^2 f_{n-1}^*}{2!} u_{n-1}(u_{n-1} + 1) \\ \quad + \frac{\bar{\Delta}^3 f_{n-1}^*}{3!} u_{n-1}(u_{n-1} + 1)(u_{n-1} + 2) \end{array} \right\} \dots (25)$$

bildet. Daraus ergibt sich dann die im n -ten Intervall zur Verwendung gelangende Näherungsfunktion $Y_n^*(x)$ in der Form

$$Y_n^*(x) = y_{n-1}^* + \int_{x_{n-1}}^x F_{n-1}(x) dx \quad (n > 3) \dots \dots (26)$$

aus der man weiterhin den nächsten Tabellenwert y_n^* sofort in der Gestalt

$$\left. \begin{array}{l} y_n^* = Y_n^*(x_n) = y_{n-1}^* + \int_{x_{n-1}}^{x_n} F_{n-1}(x) dx \\ \quad = y_{n-1}^* + h \left[f_{n-1}^* + \frac{1}{2} \bar{\Delta} f_{n-1}^* + \frac{5}{12} \bar{\Delta}^2 f_{n-1}^* + \frac{3}{8} \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^* \right] \end{array} \right\} (n > 3) \quad (27)$$

erhält. Die vollständige Näherungsfunktion $y^*(x)$ erscheint also in dieser Weise zusammengesetzt aus der für die drei ersten Intervalle vorauszubestimmten Anfangslösung und für $n > 3$ aus den einzelnen biquadratischen Polynomen (26). Bei der Durchführung des Verfahrens ist es nicht nötig, die genaue Gestalt (26) dieser letzteren zu kennen. Es genügt vielmehr, die Werte y_n^* direkt gemäß (27) zu berechnen. Für unsere Zwecke ist es jedoch gerade wichtig, den

³⁾ Über die Änderungen, die eintreten, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, vgl. S. 362.

⁴⁾ Die vierten Differenzen sind zur Integration von (1) nicht nötig, werden jedoch bei der Fehlerabschätzung gebraucht.

Gesamtverlauf der Funktionen (26) in den zugehörigen Intervallen in Betracht zu ziehen. Dieser ergibt sich nach durchgeführter Integration der Gl. (1) aus dem Schema (23) gemäß (25) und (26) sofort in der Form

$$Y_n^*(x) = y_{n-1}^* + h \left\{ f_{n-1}^* u_{n-1} + (6 \bar{A} f_{n-1}^* + 3 \bar{A}^2 f_{n-1}^* + 2 \bar{A}^3 f_{n-1}^*) \frac{u_{n-1}^2}{12} \right. \\ \left. + (\bar{A}^2 f_{n-1}^* + \bar{A}^3 f_{n-1}^*) \frac{u_{n-1}^3}{6} + \bar{A}^3 f_{n-1}^* \frac{u_{n-1}^4}{24} \right\} \quad (n > 3) \quad (28).$$

Nachdem nunmehr der Gesamtverlauf der Näherungsfunktion $y^*(x)$ auf Grund von (28) bekannt ist, kann der Fehler $\delta(x)$ gemäß (22) berechnet werden. Es ist grundsätzlich festzuhalten, daß dies mit beliebiger Genauigkeit geschehen kann, wenn man nur genügend viele Punkte der Kurven (28) verwendet. Für die praktische Anwendung handelt es sich jedoch darum, solche Rechenmethoden anzugeben, die möglichst einfach im Gebrauch sind. Wir machen dazu noch die in konkreten Fällen immer leicht zu erfüllende Annahme (von der man sich übrigens nötigenfalls ohne jede Schwierigkeit befreien kann), daß die in den drei ersten Intervallen angenommene Ausgangsfunktion dort nicht merklich von der genauen Lösung $y(x)$ abweiche.

Da die beiden Exponentialfaktoren in (22) stets positiv sind, erhält man eine Schranke für den Fehlerbetrag $|\delta(x)|$ wenn man in (22) $q(x)$ durch irgendeine Majorante des Betrages $|q(x)|$ ersetzt. Im folgenden wird gezeigt, wie eine solche Majorante stets in einfachster Weise gebildet werden kann, womit dann gleichzeitig auch unser Problem der Fehlerabschätzung im wesentlichen gelöst ist. Zunächst lassen sich in jedem Intervall zwei Werte der Funktion $q(x)$ sofort angeben, nämlich die Werte in den beiden Intervallendpunkten. Gemäß (10), (26) und (28) hat $q(x)$ im n -ten Intervall ($n > 3$) die Gestalt

$$\left. \begin{aligned} q(x) &= f(x, Y_n^*(x)) - Y_n^{*'}(x) \\ &= f(x, Y_n^*(x)) - f(x, y(x)) - [Y_n^{*'}(x) - y'(x)] \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (29).$$

Weiterhin folgen aus (26) und (27) die Gleichungen:

$$Y_n^*(x_{n-1}) = y_{n-1}^* \quad Y_n^*(x_n) = y_n^* \quad \dots \quad (30),$$

sowie aus (25) die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} Y_n^{*'}(x_{n-1}) &= F_{n-1}(x_{n-1}) = f_{n-1}^* \\ Y_n^{*'}(x_n) &= F_{n-1}(x_n) = f_{n-1}^* + \bar{A} f_{n-1}^* + \bar{A}^2 f_{n-1}^* + \bar{A}^3 f_{n-1}^* \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (31).$$

Durch Einsetzen von (30) und (31) in (29) erhält man schließlich

$$q(x_{n-1}) = f(x_{n-1}, y_{n-1}^*) - f_{n-1}^* = 0 \quad \dots \quad (32)$$

und

$$q(x_n) = f(x_n, y_n^*) - f_{n-1}^* - \bar{A} f_{n-1}^* - \bar{A}^2 f_{n-1}^* - \bar{A}^3 f_{n-1}^* = \bar{A}^4 f_n^* \quad \dots \quad (33).$$

Während also die Funktion $q(x)$ nach der eben gemachten Voraussetzung in den drei ersten Intervallen identisch verschwindet, besitzt sie nachher einen unstetigen, zackenförmigen Verlauf, indem sie im n -ten Intervall zwischen den Werten

$$q(x_{n-1}) = 0, \quad q(x_n) = \bar{A}^4 f_n^* \quad \dots \quad (34)$$

variiert. In Bild 1 ist die Funktion $q(x)$ für ein Beispiel ausgerechnet. Die grundlegenden Werte (34) können sofort angegeben werden, da sich die vierten Differenzen unmittelbar aus dem Schema (23) ablesen lassen.

Es lassen sich nun aber noch weitere Schlüsse ziehen über den Verlauf von $q(x)$. Es läßt sich zeigen, daß unter sehr allgemeinen Voraussetzungen $|q(x)|$ in jedem einzelnen Intervall erstens monoton ansteigt und zweitens nach oben konkav verläuft, daß also die beiden ersten Ableitungen von $|q(x)|$ stets positiv sind (vgl. Bild 1). Damit können wir aber eine sehr einfache Majorante $\bar{q}(x)$ für $|q(x)|$ bilden. Diese ergibt sich dadurch, daß man die einzelnen Kurvenstücke, aus denen $|q(x)|$ besteht, durch die Sehne zwischen ihren Endpunkten ersetzt. Die auf diese Weise entstehende, aus lauter geraden Strecken bestehende Funktion $\bar{q}(x)$ ist, ebenso wie $|q(x)|$ in den Intervallendpunkten unstetig. Sie ist in Bild 1 gestrichelt eingetragen. Gemäß (34) kann $\bar{q}(x)$ äußerst einfach berechnet werden. Nach der obigen Bemerkung hat man dann also eine Fehlerabschätzung in der Form

$$|\delta(x)| < \delta(x) = e^{-\int_{x_3}^x p dx} \int_{x_3}^x \bar{q} e^{\int_{x_3}^x p dx} dx \quad \dots \quad (35).$$

Als untere Grenze kann bei allen Integralen in (35) der Wert x_3 gewählt werden, da nach der gemachten Voraussetzung $\delta(x)$ in den drei ersten Intervallen identisch verschwindet.

Es handelt sich nun vor allem noch darum zu untersuchen, unter welchen Bedingungen $|q(x)|$ in jedem einzelnen Intervall monoton ansteigt und nach oben konkav verläuft. Dazu entwickeln wir $q(x)$ im n -ten Intervall um den Anfangspunkt nach Potenzen der kleinen Größe h , was nach der auf S. 359 gemachten Voraussetzung sicher möglich ist bis zur 5. Potenz. Zur Aufstellung dieser Reihe nehmen wir zunächst an, daß $y^*(x)$ für $x_{n-4} \leq x \leq x_{n-1}$ genau mit der exakten Lösung $y(x)$ übereinstimme. Ferner bezeichnen wir die Werte der Ableitungen dieser letzteren Funktion für $x = x_n$ durch y'_n, y''_n, \dots . Dann ist

$$y'(x) = y'_{n-1} + \frac{h}{1!} y''_{n-1} u_{n-1} + \frac{h^2}{2!} y'''_{n-1} u_{n-1}^2 + \frac{h^3}{3!} y''''_{n-1} u_{n-1}^3 + \dots \quad (36).$$

Weiterhin ergibt sich die Entwicklung von $Y_n^{*'}(x) = F_{n-1}(x)$ nach (25). Unter der gemachten Voraussetzung bestehen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} f_{n-4}^* &= y'_{n-4} = y'_{n-1} - \frac{3h}{1!} y''_{n-1} + \frac{9h^2}{2!} y'''_{n-1} - \frac{27h^3}{3!} y''''_{n-1} + \dots \\ f_{n-3}^* &= y'_{n-3} = y'_{n-1} - \frac{2h}{1!} y''_{n-1} + \frac{4h^2}{2!} y'''_{n-1} - \frac{8h^3}{3!} y''''_{n-1} + \dots \\ f_{n-2}^* &= y'_{n-2} = y'_{n-1} - \frac{h}{1!} y''_{n-1} + \frac{h^2}{2!} y'''_{n-1} - \frac{h^3}{3!} y''''_{n-1} + \dots \\ f_{n-1}^* &= y'_{n-1} \end{aligned} \right\} \dots \quad (37),$$

aus denen sich sofort für die in (25) auftretenden Differenzen die Entwicklungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Delta} f_{n-1}^* &= h y''_{n-1} - \frac{h^2}{2} y'''_{n-1} + \frac{h^3}{6} y''''_{n-1} - \frac{h^4}{24} y^{(v)}_{n-1} + \frac{h^5}{120} y^{(vi)}_{n-1} - \dots \\ \bar{\Delta}^2 f_{n-1}^* &= h^2 y'''_{n-1} - h^3 y''''_{n-1} + \frac{7h^4}{12} y^{(v)}_{n-1} - \frac{h^5}{4} y^{(vi)}_{n-1} + \dots \\ \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^* &= h^3 y''''_{n-1} - \frac{3h^4}{2} y^{(v)}_{n-1} + \frac{5h^5}{4} y^{(vi)}_{n-1} - \dots \end{aligned} \right\} \dots \quad (38)$$

ergeben. Setzt man diese Werte in (25) ein, so erhält man durch leichte Rechnung

$$\left. \begin{aligned} Y_n^{*'}(x) &= y'_{n-1} + \frac{h}{1!} y''_{n-1} u_{n-1} + \frac{h^2}{2!} y'''_{n-1} u_{n-1}^2 + \frac{h^3}{3!} y''''_{n-1} u_{n-1}^3 \\ &\quad - h^4 y^{(v)}_{n-1} \left(\frac{1}{4} u_{n-1} + \frac{11}{24} u_{n-1}^2 + \frac{1}{4} u_{n-1}^3 \right) \\ &\quad + h^5 y^{(vi)}_{n-1} \left(\frac{3}{10} u_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-1}^2 + \frac{5}{24} u_{n-1}^3 \right) \end{aligned} \right\} \dots \quad (39).$$

Die Reihen (36) bis (39) sowie auch die im folgenden zu benutzenden Reihen setzen sich, wenn $f(x, y)$ eine analytische Funktion ist, ins Unendliche fort. Andernfalls sind sie in bekannter Weise durch ein Restglied abgeschlossen zu denken. Nach der Voraussetzung auf S. 359 kann angenommen werden, daß dies frühestens nach der 5. Potenz der Fall ist. Der eckige Klammerausdruck in (29) ergibt sich dann als Differenz von (36) und (39) in der Form

$$\left. \begin{aligned} -[Y_n^{*'}(x) - y'(x)] &= h^4 y^{(v)}_{n-1} \left(\frac{1}{4} u_{n-1} + \frac{11}{24} u_{n-1}^2 + \frac{1}{4} u_{n-1}^3 + \frac{1}{24} u_{n-1}^4 \right) \\ &\quad + h^5 y^{(vi)}_{n-1} \left(-\frac{3}{10} u_{n-1} - \frac{1}{2} u_{n-1}^2 - \frac{5}{24} u_{n-1}^3 + \frac{1}{120} u_{n-1}^4 \right) + \dots \end{aligned} \right\} \dots \quad (40).$$

Ferner ergibt sich durch Integration von (40), wenn wie bisher die Glieder bis zur 5. Ordnung angeschrieben werden,

$$[Y_n^*(x) - y(x)] = -h^5 y^{(v)}_{n-1} \left(\frac{1}{8} u_{n-1}^2 + \frac{11}{72} u_{n-1}^3 + \frac{1}{16} u_{n-1}^4 + \frac{1}{120} u_{n-1}^5 \right) - \dots \quad (41).$$

Es handelt sich nun noch darum, die Differenz der beiden ersten Terme in der zweiten Zeile in (29) zu bestimmen. Man erhält zunächst

$$f(x, Y_n^*(x)) - f(x, y(x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x)) [Y_n^*(x) - y(x)] + \dots \quad (42).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y(x_n)) = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_n$$

und schreibt wiederum nur die Terme bis zur 5. Ordnung, so nimmt (42) gemäß (41) die Form an

$$\left. \begin{aligned} f(x, Y_n^*(x)) - f(x, y(x)) \\ = -h^5 y_{n-1}^{\text{v}} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{n-1} \left(\frac{1}{8} u_{n-1}^2 + \frac{11}{72} u_{n-1}^3 + \frac{1}{16} u_{n-1}^4 + \frac{1}{120} u_{n-1}^5 \right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (43).$$

Damit ergibt sich nun auf Grund von (29), (40) und (43) für $q(x)$ im n -ten Intervall die Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} q(x) = & h^4 y_{n-1}^{\text{v}} \left(\frac{1}{4} u_{n-1} + \frac{11}{24} u_{n-1}^2 + \frac{1}{4} u_{n-1}^3 + \frac{1}{24} u_{n-1}^4 \right) \\ & - h^5 \left[y_{n-1}^{\text{vI}} \left(\frac{3}{10} u_{n-1} + \frac{1}{2} u_{n-1}^2 + \frac{5}{24} u_{n-1}^3 - \frac{1}{120} u_{n-1}^5 \right) \right. \\ & \left. + y_{n-1}^{\text{v}} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{n-1} \left(\frac{1}{8} u_{n-1}^2 + \frac{11}{72} u_{n-1}^3 + \frac{1}{16} u_{n-1}^4 + \frac{1}{120} u_{n-1}^5 \right) \right] + \dots \end{aligned} \right\} \quad (44).$$

$x_{n-1} \leq x \leq x_n \qquad \qquad \qquad 0 \leq u_{n-1} \leq 1$

Das ist die gesuchte Reihenentwicklung für $q(x)$. Da h eine kleine Größe ist, wird der Verlauf von $q(x)$ wesentlich bestimmt durch das erste, h^4 enthaltende Glied in (44). Wenn wir zunächst die höheren Glieder vernachlässigen (ihr Einfluß wird nächstens noch genauer untersucht werden), so gilt für $q(x)$ unter Berücksichtigung von (34) die sehr angenäherte Darstellung

$$\left. \begin{aligned} q(x) = \bar{\Delta}^4 f_n^* \left(\frac{1}{4} u_{n-1} + \frac{11}{24} u_{n-1}^2 + \frac{1}{4} u_{n-1}^3 + \frac{1}{24} u_{n-1}^4 \right) \Bigg\} \dots \dots \dots (45). \\ x_{n-1} \leq x \leq x_n, \qquad \qquad \qquad 0 \leq u_{n-1} \leq 1 \end{aligned} \right\}$$

Diese Funktion ist aber ihrem Betrage nach stets monoton ansteigend und nach oben konkav.

Für die Herleitung der Näherung (45) wurde über die Funktion $y^*(x)$ die Voraussetzung gemacht, daß sie für $x_{n-4} \leq x \leq x_{n-1}$ genau mit $y(x)$ übereinstimme. Dies ist zunächst nach Voraussetzung für $n=4$ der Fall. Infolgedessen gilt im 4. Intervall für $q(x)$ die genaue Darstellung (44). Aber schon im nächsten Intervall ist die Voraussetzung nicht mehr erfüllt. Es soll nun untersucht werden, was diese Ungenauigkeit für einen Einfluß auf den Verlauf von $q(x)$ im 5. Intervall hat. Wir verstehen dazu für diese Betrachtung (und nur für diese) im 5. Intervall unter $y(x)$ nicht wie bisher die genaue Lösung des Problems, vielmehr diejenige Lösung von (1), die an Stelle von (2) durch die Anfangsbedingung $y(x_4) = y_4^*$ bestimmt wird, was zulässig ist, wenn wir $q(x)$ gemäß (29) bilden. Im Unterschied zum 4. Intervall stimmt dann aber $y(x)$ in den drei vorangehenden Intervallendpunkten nicht mehr mit den Werten y_i^* überein, unterscheidet sich vielmehr von diesen um Beträge 5. Ordnung, und das gleiche gilt auch für die Funktion $y'(x) = f(x, y)$ hinsichtlich der Werte f_i^* . Bei den Größen des Schemas (23) sowie bei den sämtlichen Formeln (37) bis (44) treten somit für $n=5$ Änderungen 5. Ordnung ein. Genau die gleichen Schlüsse lassen sich auch für höhere Werte von n ziehen, wobei wieder die Definition von $y(x)$ entsprechend abzuändern ist. Insbesondere werden also in (44) für $n > 4$ noch weitere Glieder 5. und höherer Ordnung auftreten. Ihre Gestalt wird stark mit den einzelnen Extrapolationsschritten wechseln, jedoch ergibt sich aus der Natur des Verfahrens, daß ihre Bedeutung gegenüber derjenigen der Glieder 4. Ordnung im allgemeinen stark zurücktreten wird.

Die genannte Voraussetzung kommt also, ebenso wie die Ersetzung von (44) durch (45) auf die Vernachlässigung höherer Terme in den Entwicklungen für $q(x)$ heraus. Dies kann auf unsere Betrachtungen höchstens insofern einen Einfluß haben als evtl. in ganz extremen Fällen der für die Herleitung von $\bar{\delta}(x)$ als wesentlich vorausgesetzte monoton ansteigende und nach oben konkave Verlauf von $q(x)$ geändert werden kann. Die gleiche Bemerkung gilt auch hinsichtlich der auf S. 359 gemachten Annahme über die Differenzierbarkeit der Funktion $f(x, y)$. Auf der anderen Seite gibt es wieder zahlreiche Gründe dafür, daß $q(x)$ auch dann eine positive erste und zweite Ableitung hat, wenn die Glieder 5. Ordnung stark vertreten sind. Z.B. sind diese letzteren rationale Funktionen von ähnlicher Art wie die Glieder 4. Ordnung. Weiterhin genügt $q(x)$ mit großer Annäherung den in späteren Fällen exakt geltenden Gleichungen (66), in denen jedoch n durch $n-1$ und die Differenz durch $\bar{\Delta}^4 f_n^*$ zu ersetzen ist. Schließlich kann $q(x)$, wie aus der Herleitung von (44) hervorgeht, auch bei Berücksichtigung der höheren Glieder mit äußerster Annäherung als ganze rationale Funktion 4. Grades betrachtet werden und hat also stets einen recht einfachen Verlauf. Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß $q(x)$ in jedem Intervall mit äußerster Wahrscheinlichkeit stets monoton ansteigend und nach oben konkav verläuft.

Wenn auch eine Änderung dieses Sachverhaltes in praktischen Fällen kaum jemals zu erwarten ist, so ist es doch prinzipiell wertvoll, eine Kontrollmöglichkeit über den Verlauf von $q(x)$

zu haben, wodurch dann das ganze Verfahren auf eine vollständig strenge Grundlage gestellt wird. Eine solche Kontrolle kann aber in der einfachsten Weise jederzeit gemäß (29) erfolgen, indem man $q(x)$ für einige geeignete Zwischenwerte berechnet. Dabei werden stets ganz wenige solche Werte in einigen wenigen geeigneten Intervallen genügen, auf Grund von welchen dann der Verlauf von $q(x)$ sofort abgeschätzt werden kann. Z.B. wird es oft vorteilhaft sein, den Wert $q_{n-\frac{1}{2}} = q(x_{n-\frac{1}{2}})$ in der Mitte des n . Intervalles zu bestimmen, wobei zur Abkürzung

$x_{n-\frac{1}{2}} = x_n - \frac{h}{2}$ gesetzt ist. Dazu müssen gemäß (29) zuerst die Werte

$$y_{n-\frac{1}{2}}^* = Y_n^*(x_{n-\frac{1}{2}}), \quad y_{n-\frac{1}{2}}^{*'} = Y_n^{*'}(x_{n-\frac{1}{2}}) \dots \dots \dots (46)$$

gebildet werden. Der erstere ergibt sich gemäß (28) aus dem Schema (23) in der Form

$$y_{n-\frac{1}{2}}^* = y_{n-1}^* + h \left[\frac{1}{2} f_{n-1}^* + \frac{1}{8} \bar{\Delta} f_{n-1}^* + \frac{1}{12} \bar{\Delta}^2 f_{n-1}^* + \frac{25}{384} \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^* \right] \dots \dots (47),$$

der zweite gemäß (26) und (25) in der Gestalt

$$y_{n-\frac{1}{2}}^{*'} = f_{n-1}^* + \frac{1}{2} \bar{\Delta} f_{n-1}^* + \frac{3}{8} \bar{\Delta}^2 f_{n-1}^* + \frac{5}{16} \bar{\Delta}^3 f_{n-1}^* \dots \dots \dots (48).$$

Damit kann man nun sofort gemäß (29) die Größe

$$q_{n-\frac{1}{2}} = f(x_{n-\frac{1}{2}}, y_{n-\frac{1}{2}}^*) - y_{n-\frac{1}{2}}^{*'} \dots \dots \dots (49)$$

berechnet werden. Andere Werte von $q(x)$ ergeben sich genau entsprechend, jedoch dürfte die Anwendung von (49) auch in den ungünstigsten Fällen genügen.

4. Praktische Durchführung der Fehlerabschätzung in graphischer und tabellarischer Form

Die entwickelte Fehlerabschätzung wird im wesentlichen durch Formel (35) gegeben, in welcher alle Funktionen der rechten Seite leicht berechnet oder abgeschätzt werden können. Man kann diese Formel in verschiedener Weise verwenden. Der einfachste Weg ist der graphische, der zuerst kurz besprochen werden soll. Da die Funktion $\bar{q}(x)$ ihrer zackenförmigen Gestalt wegen nicht besonders geeignet ist, ersetzen wir sie nochmals und zwar durch eine geeignete mittlere Majorante $\bar{\bar{q}}(x)$, d.h. durch eine möglichst regelmäßig verlaufende Kurve, für die die Beziehung

$$\int_{x_3}^x \bar{q}(x) dx \geq \int_{x_3}^x \bar{\bar{q}}(x) dx \dots \dots \dots (50)$$

besteht. Eine solche Majorante $\bar{\bar{q}}(x)$ kann stets mit größter Leichtigkeit angegeben werden (vgl. Bild 1). $\bar{\bar{q}}(x)$ kann nun wieder in (22) an Stelle von $q(x)$ eingesetzt werden, wodurch man für den Fehler eine Majorante $\bar{\delta}(x)$ erhält. Es ergibt sich somit die Fehlerabschätzung

$$|\delta(x)| < \bar{\delta}(x) = e^{-\int_{x_3}^x p dx} \int_{x_3}^x \bar{\bar{q}} e^{\int_{x_3}^x p dx} dx \dots \dots \dots (51).$$

Die Schranke $\bar{\delta}(x)$ kann in einfachster Weise nach bekannten graphischen Methoden berechnet oder abgeschätzt werden. Man vergleiche dazu das nachfolgende Beispiel. Noch einfacher kann man zum Ziel kommen, wenn man $\bar{\bar{q}}(x)$ an Stelle von $q(x)$ in die Fehlergleichung (21) einsetzt, das Richtungsfeld dieser Gleichung durch Berechnung einiger Werte bestimmt und dann die Kurve $\bar{\delta}(x)$ näherungsweise aus dem Richtungsfeld abliest.

Zur tabellarischen Durchführung der Fehlerabschätzung greifen wir auf Formel (35) zurück. Schreibt man neben das eigentliche Rechenschema (23) ein zweites Schema der Gestalt

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_3 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & g_4 \\ a_4 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 & g_5 \\ a_5 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & g_6 \\ a_6 & & & & & \end{array} \right\} \dots \dots \dots (52)$$

dessen Größen definiert sind durch

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial y}(x_3, y_3^*), & a_n &= -\frac{\partial f}{\partial y}(x_n, y_n^*) & n > 3 \\ b_n &= h \sum_{i=3}^{n-1} a_i, & c_n &= e^{b_n} \\ d_n &= c_n |\bar{\Delta}^4 f_n^*|, & e_n &= \sum_{i=4}^n d_i, & g_n &= \frac{h}{2} \frac{e_n}{c_n} \end{aligned} \right\} \quad (53),$$

so erkennt man leicht, daß mit außerordentlicher Annäherung die Gleichungen bestehen

$$c_n = e^{\int_{x_3}^{x_n} \frac{h}{2} p dx}, \quad e_n = \frac{2}{h} \int_{x_3}^{x_n} \bar{q}(x) e^{\int_{x_3}^{x_n} p dx} dx, \quad g_n = \bar{\delta}(x_n) \dots \quad (54).$$

Für den Fehler $\delta(x_n)$ am Ende des n -ten Intervalles gilt also gemäß (35) die Abschätzung

$$|\delta(x_n)| < \bar{\delta}(x_n) = g_n \dots \dots \dots (55).$$

Eine kontinuierliche Fehlerschranke erhält man, indem man die einzelnen Werte g_n durch gerade Linien verbindet oder durch eine Kurve interpoliert. Die Größen (53) sind außerordentlich einfach zu berechnen, speziell auch für Rechenmaschinen.

Damit ist nun unser Ziel erreicht. Zusammenfassend kann man sich an die folgende Regel halten: Die Differentialgleichung (1) sei unter der Anfangsbedingung (2) nach Adams integriert. Von der Funktion $f(x, y)$ wird dabei einzig vorausgesetzt, daß sie in einem Bereiche, der nur die Näherung $y^*(x)$ sowie die exakte Lösung $y(x)$ im Inneren enthalten soll, stetig und stetig nach y differenzierbar sei, was durch Abschätzung in jedem konkreten Fall sofort festgestellt werden kann. Ferner ist abzuschätzen, ob für den Fehler die Näherung (22) zulässig ist, was ebenfalls in elementarer Weise geschehen kann. Dann erhält man eine Schranke für den Fehlerbetrag $|\delta(x)|$, wenn man in (22) an Stelle von $q(x)$ irgendeine Majorante für $|q(x)|$ einsetzt.

Praktisch wird man als Majorante immer die Funktion $\bar{q}(x)$ verwenden, was auf die außerordentlich leicht zu berechnenden Abschätzungen (51) und (55) führt. Die Verwendung von $\bar{q}(x)$ beruht auf der Vernachlässigung höherer Glieder in gewissen Reihenentwicklungen für $q(x)$. Obwohl sich kann ein Fall denken läßt, in dem diese Vernachlässigungen nicht zulässig sind, besteht die Möglichkeit, ihren Einfluß in einfacher Weise zu kontrollieren und nötigenfalls an Stelle von $\bar{q}(x)$ eine andere Majorante einzuführen⁵⁾. Die entwickelte Methode stellt also ein ebenso einfaches wie strenges Verfahren der Fehlerabschätzung dar.

Diese Betrachtungen lassen sich noch in interessanter Weise weiterführen. Wenn die Majorante $q(x)$ so gewählt wird, daß in (50) annähernd das Gleichheitszeichen steht, was sich ebenfalls stets leicht erreichen läßt, so ergibt sich aus (45), daß, wenn $q(x)$ bzw. die Differenzen $\bar{\Delta}^4 f_n^*$ im ganzen Intervall immer das gleiche Vorzeichen haben (was fast immer der Fall sein wird), auch der Fehler stets dieses gleiche Vorzeichen hat. Ferner muß sich in diesem Falle die Fehler schranke (51) zum Betrag des wirklichen Fehlers stets angenähert verhalten wie

$$\frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{11}{24} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24} \right)}{\int_0^1 \left(\frac{1}{4} u + \frac{11}{24} u^2 + \frac{1}{4} u^3 + \frac{1}{24} u^4 \right) du} = \frac{360}{251} \dots \dots \dots (56).$$

Die Fehlerschranke ist also im genannten Falle gleichen Vorzeichens im allgemeinen (d. h., wenn wieder die in der obigen Regel ausgesprochenen Vernachlässigungen zulässig sind) stets etwa das Anderthalbfache des wirklichen Fehlers. Das gleiche Verhältnis ergibt sich stets automatisch für die Abschätzung (55). Voraussetzung bei den sämtlichen obigen Betrachtungen ist, daß das Verfahren mit so vielen Stellen durchgeführt wurde, daß die Abrundungsgenauigkeiten gegenüber den übrigen Fehlern nicht merklich in Betracht kommen.

5. Berechnung eines Beispiels⁶⁾

Die Gleichung $y' = x - y$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ soll im Intervall $0 \leq x \leq 1$ nach Adams integriert werden und es soll der dabei begangene Fehler abgeschätzt werden.

⁵⁾ Praktisch kann man sich wohl auch in den ungünstigsten Fällen auf die Betrachtung der Werte $g_{n-1/2}$ gemäß (47) – (49) beschränken, von denen bei rechnerischer Durchführung einige als Stichproben berechnet werden können, während es bei maschineller Durchführung keine Schwierigkeit bereitet, sie alle zu bestimmen.

⁶⁾ Es wurde absichtlich eine ganz einfache Differentialgleichung gewählt, damit jeder Schritt an Hand der exakten Lösung sofort nachkontrolliert werden kann.

Die Lösung kann in der Umgebung des Anfangspunktes sehr rasch und genau durch Potenzreihen berechnet werden. Man errechnet auf diese Weise die Werte:

$$\left. \begin{aligned} y(-0,1) &= 0,0051709 \\ y(0,1) &= 0,0048374 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y(0,0) &= 0,0000000 \\ y(0,2) &= 0,0187308 \end{aligned} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot (57).$$

Wir wählen dementsprechend $x_0 = -0,1$ und $h = 0,1$. Um mit der bisherigen Bezeichnungsweise im Einklang zu bleiben, muß man sich dann nur die ursprüngliche Anfangsbedingung durch die ihr völlig äquivalente erste

Gleichung (57) ersetzt denken. Das Schema (23) nimmt dann die Gestalt (58) an, wodurch die gegebene Gleichung integriert wird. Ferner wurde, obwohl dies zur Durchführung der Fehlerabschätzung nicht notwendig ist, der Verlauf der zugehörigen Funktion $|q(x)|$ ermittelt. Das Resultat ist in Bild 1 aufgezeichnet. In den drei ersten Intervallen verschwindet diese

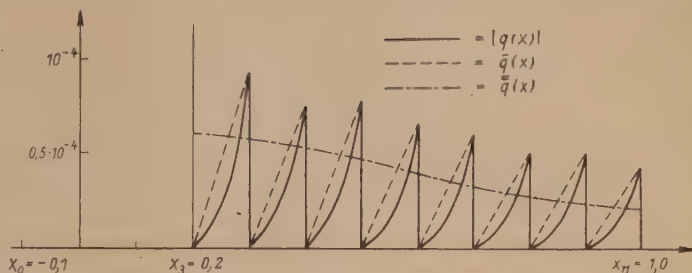


Bild 1

Funktion identisch, in den folgenden erkennt man dagegen deutlich den monoton ansteigenden Charakter von $|q(x)|$ und seiner Ableitung. Der nicht ganz regelmäßige Verlauf der Zacken ist auf den Einfluß der Glieder höherer Ordnung zurückzuführen.

x_n	y_n^*	f_n^*	$\bar{\Delta} f_n^*$	$\bar{\Delta}^2 f_n^*$	$\bar{\Delta}^3 f_n^*$	$\bar{\Delta}^4 f_n^*$	(58)
-0,1	0,0051709	-0,1051709					
0,0	0,0000000	0,0000000	0,1051709				
0,1	0,0048374	0,0951626	0,0951626	-0,0100083			
0,2	0,0187308	0,1812692	0,0861066	-0,0090560	0,0009523		
0,3	0,0408214	0,2591786	0,0779094	-0,0081972	0,0008588	-0,0000935	
0,4	0,0703254	0,3296746	0,0704960	-0,0074134	0,0007838	-0,0000750	
0,5	0,1065382	0,3934618	0,0704960	-0,0067088	0,0007046	-0,0000792	
0,6	0,1488206	0,4511794	0,0637872	-0,0060696	0,0006369	-0,0000654	
0,7	0,1965959	0,5034041	0,0577176	-0,0054929	0,0005767	-0,0000625	
0,8	0,2493403	0,5506597	0,0522247	-0,005238	0,0005238	-0,0000529	
0,9	0,3065816	0,5934184	0,0472556	-0,0049691	0,0004722	-0,0000516	
1,0	0,3678917	0,6321083	0,0427587	-0,0044969	0,0004281	-0,0000441	
			0,0386899	-0,0040688			

Genauer Wert: $y(1,0) = 0,36787944$

Anschließend an die Integration kann nun der dabei begangene Fehler abgeschätzt werden. Dies soll zunächst in der auf S. 363 erwähnten graphischen Form geschehen. Der Gang dieser einfachen Rechnung ist unmittelbar aus Bild 2 zu ersehen. Zunächst sind die Werte $|\bar{\Delta}^4 f_n^*|$ (in 10^4 mal vergrößertem Maßstab) als Punkte eingetragen. Weiterhin ist eine zugehörige Funktion $\bar{\delta}(x)$ so eingetragen, daß sie gemäß der Bemerkung auf S. 363 möglichst etwa in halber Höhe dieser Punkte verläuft. Damit kann nun der Ausdruck (51) für $\bar{\delta}(x)$ gebildet werden, wie das in Bild 2 schrittweise auf graphischem Wege durchgeführt ist, wobei der Übersicht wegen einige Zwischenergebnisse weggelassen sind, die man vorteilhafterweise auch graphisch aufgetragen wird. Für $x=1$ ergibt sich speziell $\bar{\delta}(1) = 1,85 \cdot 10^{-5}$, während aus dem Rechenschema (58) für den wirklichen Fehler der Wert $\delta(1) = -1,23 \cdot 10^{-5}$ hervorgeht. Der Fehler hat also, wie auf S. 364 bemerkt, tatsächlich das gleiche Vorzeichen wie die Differenzen $\bar{\Delta}^4 f_n^*$, und die gefundene Schranke ist etwa das Anderthalbfache des Fehlerbetrages.

Zur Durchführung der Fehlerabschätzung in tabellarischer Form ist das Schema (52) gemäß (53) auszurechnen. Als Resultat ergibt sich:

0,5	0,05	1,05	0,0000982	0,0000982	0,0000468
1,0	0,15	1,16	0,0000870	0,0001852	0,0000798
1,0	0,25	1,28	0,0001015	0,0002867	0,000112
1,0	0,35	1,41	0,0000916	0,0003783	0,000134
1,0	0,45	1,57	0,0000981	0,0004764	0,000152
1,0	0,55	1,73	0,0000915	0,0005679	0,000164
1,0	0,65	1,92	0,0000990	0,0006669	0,000173
1,0	0,75	2,12	0,0000933	0,0007602	0,000180

... (59).

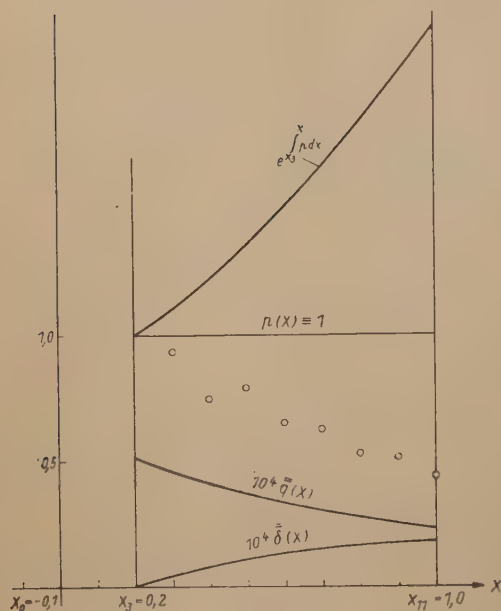


Bild 2

Gemäß (55) stellt die letzte Kolonne eine Majorante für den Fehler dar. Speziell erhält man für $x=1$ die Schranke $g_{11} = 1,80 \cdot 10^{-4}$. Diese ist also wieder etwa das Anderthalbfache des zugehörigen Fehlerbetrages $|\delta(1)| = 1,23 \cdot 10^{-4}$. Schließlich kann man sich noch, falls man dies für nötig hält, sowohl bei der graphischen wie bei der tabellarischen Form über die Zulässigkeit der Annahmen vergewissern. Z.B. können gemäß (49) einige der Größen $q_{n-\frac{1}{2}}$ berechnet

werden. Die resultierenden Werte sind aus Bild 1 zu ersehen.

6. Fehlerabschätzung bei mittelbarer Extrapolation

Die bisherigen Entwicklungen können fast unverändert auch auf diesen Fall übertragen werden. Das Verfahren von Adams werde wieder durchgeführt mittelst Polynomen vom 4. Grade, wobei wir auch hier annehmen können, daß die angenäherten Werte in den drei

ersten Intervallen nicht merklich von den genauen abweichen. Der Unterschied gegenüber der unmittelbaren Extrapolation besteht darin, daß für $n > 3$ der Wert (27) nicht als endgültiger sondern nur als erster Näherungswert betrachtet wird, der noch iterativ verbessert wird⁷⁾. (27) sei jetzt dementsprechend durch $y_{n,0}^*$ bezeichnet sowie der zugehörige Wert $f(x_n, y_{n,0}^*)$ durch $f_{n,0}^*$ und die Differenzen durch $\bar{\Delta} f_{n,0}^*, \bar{\Delta}^2 f_{n,0}^*, \dots$. Alle diese Größen werden wieder in das Differenzschema (23) eingetragen. Die iterative Verbesserung besteht darin, daß man mittelst der obigen Größen den neuen, besseren Näherungswert

$$y_{n,1}^* = y_{n,0}^* + h \left[f_{n,0}^* - \frac{1}{2} \bar{\Delta} f_{n,0}^* - \frac{1}{12} \bar{\Delta}^2 f_{n,0}^* - \frac{1}{24} \bar{\Delta}^3 f_{n,0}^* \right] \dots \dots \dots (60)$$

bildet, der in gleicher Weise weiter verbessert wird bis sich die neu entstehenden Werte nicht mehr ändern. Diese endgültige Näherung, die der weiteren Rechnung zugrunde gelegt wird, sei wie früher durch y_n^* bezeichnet sowie die zugehörigen Größen im Schema (23) durch $f_n^*, \bar{\Delta} f_n^*, \dots$. Auch die iterativen Verbesserungen bis zu den endgültigen Näherungen werden im Schema (23) eingetragen.

Zum Näherungswert y_n^* gehört wiederum eine Näherungsfunktion $Y_n^*(x)$ mit $Y_n^*(x_n) = y_n^*$, welche letztere ihrerseits gemäß (29) den Verlauf von $q(x)$ im n . Intervall bestimmt. Über $q(x)$ lassen sich zunächst wieder entsprechend (34) einige exakte Aussagen machen. Während die

⁷⁾ Vgl. die unter ¹⁾ genannten Werke sowie die unter ²⁾ an dritter Stelle genannte Arbeit.

Gl.(30) und die erste Gl.(31) ihre Gültigkeit unverändert beibehalten, geht die zweite Gl.(31) der Natur des Iterationsverfahrens entsprechend⁶⁾ über in

$$Y_n^{*'}(x_n) = F_{n-1}(x_n) = f_n^* \dots \dots \dots (61),$$

so daß an Stelle von (34) die Gleichungen treten

$$q(x_{n-1}) = 0, \quad q(x_n) = 0 \dots \dots \dots (62),$$

$q(x)$ verläuft jetzt also stetig (vgl. Bild 3), während $q'(x)$ in den Intervallendpunkten unstetig ist.

Die Funktion $Y_n^*(x)$ ist eine ganze rationale Funktion 4. Grades, von der bis jetzt immer nur der Teil innerhalb des n . Intervalles in Betracht gezogen wurde. Im folgenden soll diese Einschränkung aufgehoben und insbesondere der Verlauf von $Y_n^*(x)$ im $n+1$. Intervall betrachtet werden. Wir behaupten, daß dann die Beziehung besteht

$$Y_n^*(x) \equiv Y_{n+1,0}^*(x) \dots \dots \dots (63),$$

wobei $Y_{n+1,0}^*(x)$ entsprechend der obigen Bezeichnungsweise die zumersten Näherungswert $y_{n+1,0}^*$ gehörende Näherungsfunktion für das $n+1$. Intervall bedeutet. In der Tat folgt (63) wieder unmittelbar aus der Natur des Iterationsverfahrens, indem die Ableitungen der beiden Polynome in (63), d.h. in unserer Bezeichnungsweise die beiden Polynome 3. Grades $F_{n-1}(x)$ und $F_{n,0}(x)$ durch dieselben vier Punkte bestimmt werden.

Gleichzeitig mit $Y_n^*(x)$ kann natürlich gemäß (29) auch der für das n . Intervall definierte Teil von $q(x)$ über dieses Intervall hinaus fortgesetzt werden. Wir bezeichnen die auf diese Weise entstehende Funktion durch $Q_n(x)$ (Bild 3).

$q(x)$ entsteht dann also aus den Funktionen $Q_n(x)$ dadurch, daß man von jedem $Q_n(x)$ nur den innerhalb des n . Intervalles verlaufenden Teil in Betracht zieht. Aus (63) folgt ferner sofort

$$Q_n(x) \equiv Q_{n+1,0}(x) \dots \dots \dots (64).$$

Nun ergibt sich, wie soeben bemerkt, die Funktion $Y_{n+1,0}^*(x)$ aus den früher berechneten Werten des Differenzenschemas in genau gleicher Weise wie dies im Falle der unmittelbaren Extrapolation für die dort betrachtete Funktion $Y_{n+1}^*(x)$ der Fall war. Folglich können wir auch die Eigenschaften dieser letzteren Funktion auf den jetzigen Fall übertragen. Insbesondere gilt gemäß (34):

$$Q_{n+1,0}(x_{n+1}) = \bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^* \dots \dots \dots (65).$$

Demnach genügt $Q_n(x)$ den drei Gleichungen:

$$Q_n(x_{n-1}) = 0, \quad Q_n(x_n) = 0, \quad Q_n(x_{n+1}) = \bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^* \dots \dots \dots (66).$$

Die ersten beiden dieser Gleichungen sind direkte Wiederholungen von (62), während sich die dritte gemäß (64) aus (65) ergibt.

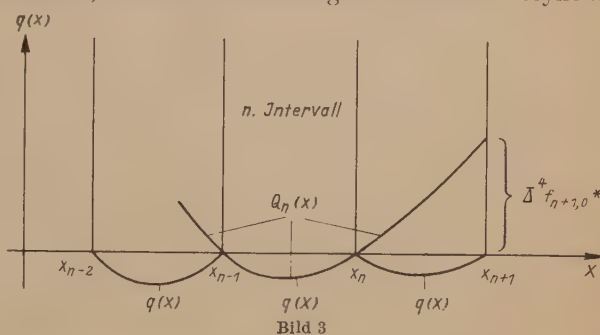
Neben den exakten Gl.(66) lassen sich wie früher noch weitere Schlüsse ziehen über den Verlauf von $q(x)$ bzw. $Q_n(x)$ im n . Intervall. Gemäß (64) und (44) besitzt $Q_n(x)$ um den Endpunkt des n . Intervalles die Entwicklung

$$Q_n(x) = h^4 y_n^V \left(\frac{1}{4} u_n + \frac{11}{24} u_n^2 + \frac{1}{4} u_n^3 + \frac{1}{24} u_n^4 \right) + \dots \dots \dots (67).$$

Berücksichtigen wir in dieser wie früher nur das angegebene erste Glied, so erhält man unter Beachtung von (66) für $q(x)$ im n . Intervall die (45) entsprechende Näherung

$$q(x) = \bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^* \left(\frac{1}{4} u_n + \frac{11}{24} u_n^2 + \frac{1}{4} u_n^3 + \frac{1}{24} u_n^4 \right) \left. \begin{array}{l} x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ -1 \leq u_n \leq 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (68).$$

Damit ist unser Ziel im wesentlichen erreicht. Nachdem der Verlauf von $q(x)$ in den einzelnen Intervallen gemäß (68) wieder in einfacher Weise außerordentlich angenähert aus dem Differenzenschema bestimmt werden kann, kann man wieder eine Majorante für $|q(x)|$ sowie eine zugehörige mittlere Majorante bestimmen, dergestalt daß die zugehörigen Ausdrücke (35) und (51) Schranken für den Fehlerbetrag darstellen. Noch einfacher ist es jedoch, den jetzigen



Fall auf den früheren zurückzuführen, indem die Integrale über die beiden Klammerausdrücke in (68) und (45) im n -ten Intervall sich im Mittel zueinander verhalten wie

$$\frac{\int_{-1}^0 \left(\frac{1}{4} u + \frac{11}{24} u^2 + \frac{1}{4} u^3 + \frac{1}{24} u^4 \right) du}{\int_0^1 \left(\frac{1}{4} u + \frac{11}{24} u^2 + \frac{1}{4} u^3 + \frac{1}{24} u^4 \right) du} = -\frac{19}{241} = -\frac{1}{13,2105} \dots \dots (69).$$

Dazu definieren wir auch im jetzigen Fall eine Funktion $\bar{q}(x)$. Sie soll, ähnlich wie früher, dadurch charakterisiert sein, daß sie für die drei ersten Intervalle identisch verschwindet, während sie für $n > 3$ am Anfang des n -ten Intervalles verschwindet und von da an in gerader Linie zum Wert $\frac{19}{241} |\bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^*|$ am Ende des n -ten Intervalles ansteigt. Im Gegensatz zu früher ist aber jetzt $\bar{q}(x)$ keine absolute Majorante mehr für $|q(x)|$. Weiterhin kann dann die unstetige Funktion $\bar{q}(x)$ wieder durch eine stetige mittlere Majorante $\bar{\bar{q}}(x)$ ersetzt werden. Zusammenfassend gelangt man dann zu folgender Aussage:

Die auf S. 364 angegebene Regel kann in allen Stücken auch auf den jetzigen Fall der mittelbaren Extrapolation übertragen werden. Dabei sind einzig die Differenzen $\bar{\Delta}^4 f_n^$ durch die Größen $-\frac{19}{241} \bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^*$ (angenähert $-\frac{1}{13} \bar{\Delta}^4 f_{n+1,0}^*$) zu ersetzen, bzw. es ist die Definition von $\bar{q}(x)$ in der eben angegebenen Weise abzuändern.*

Auch die Möglichkeiten der strengen Kontrolle können ohne alle Schwierigkeiten übernommen werden, wie das jedoch nicht im einzelnen ausgeführt werden soll. Ebenso kann die Rechnung natürlich wieder graphisch oder tabellarisch durchgeführt werden. Da gemäß der obigen Regel der frühere Index n durch $n+1$ zu ersetzen ist, ist im jetzigen Fall eine Differenz mehr zu berechnen, falls man sich nicht mit einer Extrapolation begnügen will, wie das praktisch immer ausreichen wird. Schließlich kann man auch jetzt schließen, daß, wenn die Differenzen $\bar{\Delta}^4 f_{n,0}^*$ immer das gleiche Vorzeichen haben, die Fehlerschranke stets etwa das anderthalbfache des Betrages des wirklichen Fehlers ausmacht. Jedoch ist das Vorzeichen des letzteren jetzt demjenigen der Differenzen entgegengesetzt entsprechend dem negativen Vorzeichen in (69).

Erwähnt sei ferner noch die folgende interessante Aussage, die sich aus den obigen Ausführungen bei Annahme der zugrunde gelegten Näherungen unmittelbar ergibt:

Das Verfahren von Adams ist bei mittelbarer Extrapolation stets rd. 13mal genauer als bei unmittelbarer.

7. Beispiel zur Fehlerabschätzung bei mittelbarer Extrapolation

Das gleiche Beispiel, das unter 5. durch unmittelbare Extrapolation berechnet wurde, soll jetzt unter Verwendung der mittelbaren berechnet werden.

Wir verwenden die gleichen Ausgangswerte. Dann nimmt das Differenzenschema die Gestalt (70) an. Die endgültigen Näherungen ergeben sich dabei durch zweimalige Iteration⁸⁾.

Die letzte Kolonne stellt die Differenzen $\bar{\Delta}^4 f_{n,0}^*$ dar, die nun unmittelbar zur Fehlerabschätzung verwendet werden können. Diese kann z.B. wieder graphisch gemäß Bild 4 erfolgen, welches letzteres genau Bild 2 entspricht. Für $x=1$ erhält man speziell $\bar{\delta}(1)=1,3 \cdot 10^{-6}$, während der wirkliche Fehler gemäß (70) den Wert $\delta(1)=0,8 \cdot 10^{-6}$ hat. Der Fehler hat also, wie das nach

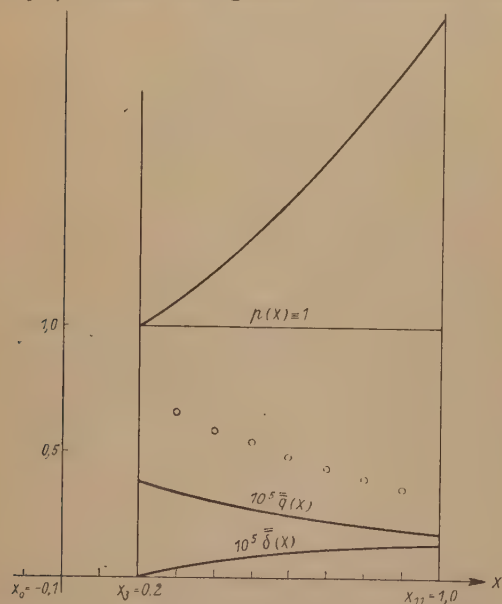


Bild 4

⁸⁾ Es ist dabei nicht nötig, alle angeschriebenen Differenzen zu berechnen, wie das in (70) der Übersicht halber geschehen ist. Der Rechnungsgang läßt sich vielmehr wesentlich abkürzen. Vgl. dazu F. R. A. Willers: Methoden der praktischen Analysis, 2. Aufl., S. 350—352.

x_n	$y_{n,i}^*$	$f_{n,i}^*$	$\Delta f_{n,i}^*$	$\bar{\Delta}^2 f_{n,i}^*$	$\bar{\Delta}^3 f_{n,i}^*$	$\bar{\Delta}^4 f_{n,0}^*$	
-0,1	0,0051709	-0,1051709					
0,0	0,0000000	0,0000000	0,1051709	-0,0100083			
0,1	0,0048374	0,0951626	0,0951626	-0,0090560	0,0009523		
0,2	0,0187308	0,1812692	0,0861066	-0,0081972	0,0008588	-0,0000935	
0,3	0,0408214	0,2591786	0,0779094	-0,0081937	0,0008623		
	0,0408179	0,2591821	0,0779129	-0,0081938	0,0008622		
	0,0408180	0,2591820	0,0779128	-0,0074176	0,0007762	-0,0000860	
0,4	0,0703228	0,3296772	0,0704952	-0,0074143	0,0007795		
	0,0703195	0,3296805	0,0704985	-0,0074145	0,0007793		
	0,0703197	0,3296803	0,0704983	-0,0067115	0,0007030	-0,0000763	
0,5	0,1065329	0,3934671	0,0637868	-0,0067086	0,0007059		
	0,1065300	0,3934700	0,0637897	-0,0067087	0,0007058		
	0,1065301	0,3934699	0,0637896	-0,0060730	0,0006357	-0,0000701	
			0,0577166		0,0006383		
0,6	0,1488135	0,4511865	0,0577192	-0,0060704	0,0006382		
	0,1488109	0,4511891	0,0577191	-0,0060705	0,0005755	-0,0000627	(70)
	0,1488110	0,4511890	0,0522241	-0,0054950	0,0005779		
0,7	0,1965869	0,5034131	0,0522265	-0,0054926	0,0005778		
	0,1965845	0,5034155	0,0522264	-0,0054927	0,0005206	-0,0000572	
	0,1965846	0,5034154	0,0472543	-0,0049721	0,0005228		
0,8	0,2493303	0,5506697	0,0472565	-0,0049699	0,0005227		
	0,2493281	0,5506719	0,0472564	-0,0049700	0,0004711	-0,0000516	
	0,2493282	0,5506718	0,0427575	-0,0044989	0,0004730		
0,9	0,3065707	0,5934293	0,0427594	-0,0044970	0,0004729		
	0,3065688	0,5934312	0,0427593	-0,0044971	0,0004264	-0,0000465	
	0,3065688	0,5934311	0,0386886	-0,0040707	0,0004282		
1,0	0,3678803	0,6321197	0,0386904	-0,0040689			
	0,3678785	0,6321215					
	0,3678786	0,6321214					

Genauer Wert: $y(1,0) = 0,36787944$.

unseren Überlegungen sein muß, tatsächlich das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Differenzen $\bar{\Delta}^4 f_{n,0}^*$, und die Schranke ist wieder rd. das Anderthalbfache des Fehlerbetrages. Schließlich findet man auch die auf S. 28 ausgesprochene Regel bestätigt, wonach der Fehler bei mittelbarer Extrapolation rd. 13mal kleiner ist als bei unmittelbarer.

8. Schlußbemerkungen und Zusammenfassung

Bei der vorstehend entwickelten Methode der Fehlerabschätzung werden gegenüber den früheren Arbeiten zwei neue Gedanken benutzt. Erstens wird zur Bestimmung des Fehlers die Fehlergleichung (21) bzw. ihre Lösung (22) verwendet, wobei man praktisch stets mit Leichtigkeit abschätzen kann, ob diese Näherung zulässig ist. Zweitens wird die wesentliche Funktion $q(x)$ in (21) und (22) durch eine geeignete Majorante ersetzt, wodurch man dann auch eine Majorante

für den Fehler erhält. Bei unmittelbarer Extrapolation lassen sich solche Majoranten sofort angeben auf Grund der vier folgenden Eigenschaften von $q(x)$:

1. $q(x)$ genügt den Gl.(34);
2. $|q(x)|$ ist in jedem Intervall in erster Näherung monoton ansteigend und nach oben konkav;
3. $q(x)$ läßt sich gemäß (29) in einfacher Weise berechnen oder abschätzen;
4. $q(x)$ kann, auch bei Berücksichtigung von höheren Gliedern, mit äußerster Annäherung als ganze rationale Funktion vierten Grades betrachtet werden.

Praktisch wird man als Majorante immer die Funktion $\bar{q}(x)$ verwenden können, die sich in ganz elementarer Weise aus dem Differenzenschema ablesen läßt. Man gelangt so zu den außerordentlich leicht zu berechnenden Abschätzungen (51) und (55).

Bei mittelbarer Extrapolation kommt man durch ganz analoge Überlegungen zum Ziel, wobei sich noch als bemerkenswertes Resultat ergibt, daß sich dieser scheinbar viel kompliziertere Fall in einfacher Weise auf den ersten zurückführen läßt.

Eingegangen am 22. Dezember 1950.

Über die konforme Abbildung gewisser rechtwinkliger Achtecke

Von N. Bundscherer in Landshut (Bayern)

Durch Überlagerung zweier mit Einschnitten versehener Rechtecke, deren Abbildung auf einfache Funktionen zurückgeführt werden kann, gelangt man zu gewissen rechtwinkligen Achtecken. Die Parameterwerte des Abbildungsintegrals lassen sich aus den Achtecksseiten berechnen. Spiegelung dieser (speziell auch ausgearteter) Achtecke liefert eine Anzahl abbildbarer Bereiche.

By superposition of two notched rectangles that can be represented by relatively simple functions, the author gives the conformal representation of certain rectangular octagons. The parameter values of the integral that gives the representation are computed from the sides of the octagon. By continued reflection of the octagons (especially of degenerate ones), a great number of representable regions is generated.

Par superposition de deux rectangles entaillés, dont la représentation conforme se fait au moyen de fonctions simples, on peut représenter certains octogones rectangulaires. Les valeurs paramétriques de l'intégrale de représentation sont calculées à l'aide des côtés d'octogone. Par réflexion de ces octogones, aussi d'octogones dégénérés, on obtient quelques domaines représentables.

Наложение двух прямоугольников с надрезами, конформное отображение которых производится при помощи простых функций, дает некоторые прямоугольные восьмиугольники. Значения параметров отображающего интеграла определяются из сторон восьмиугольника. Аналитическое продолжение этих восьмиугольников дает целый ряд конформно отображаемых областей.

Einleitung

Ist \mathcal{G} das Innere eines endlichen, geradlinigen, geschlossenen Polygons der z -Ebene, das in den Ecken A_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) die Innenwinkel $\alpha_\nu \pi$ besitzt, so bildet nach Schwarz-Christoffel ein bestimmter Zweig der Funktion:

$$z(w) = C \int_{w_0}^w \prod_{\nu=1}^n (w - a_\nu)^{\alpha_\nu - 1} dw + C' \quad \dots \quad (1),$$

wo C und C' geeignet gewählte Konstanten sind, die obere w -Halbebene \mathfrak{H} konform auf \mathcal{G} ab¹⁾. C und C' bewirken nur eine Ähnlichkeitstransformation, sind also unwesentliche Konstanten. Dagegen besteht in der Auffindung der den Punkten A_ν in der w -Ebene entsprechenden Verzweigungspunkte a_ν die eigentliche Schwierigkeit.

Da keine allgemeine Methode die Berechnung der Verzweigungspunkte aus der Gestalt eines vorgegebenen Polygons ermöglicht, ist die Lösung dieses „Parameterproblems“ wenigstens für spezielle Klassen von Polygonen anzustreben. Setzen wir voraus, daß die Innenwinkel $\alpha_\nu \pi$ nur die Werte $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3}{2}\pi$ annehmen, so erhalten wir „Treppenvpolygone“; das Abbildungsintegral der Gl.(1) ist in diesem Fall vom hyperelliptischen Typ. S. Bergmann konnte die Halbebene \mathfrak{H} auf das Innere einer gewissen Klasse von Treppensechsecken abbilden²⁾ [1]. In der vorliegenden Arbeit wird durch eine ähnliche Methode die Abbildung von \mathfrak{H} auf eine Klasse von Treppen-

¹⁾ Siehe z. B. [6], S. 218.

²⁾ Unter „Abbildung“ soll stets konforme Abbildung verstanden werden.

achtecken durchgeführt. Zwischen den Seitenlängen dieser Achtecke bestehen fünf Gleichungen, so daß noch drei Seiten (oder Gleichungen für die Seiten) beliebig vorgeschrieben werden können. Für diese Achtecke läßt sich das Parameterproblem lösen. Die Abbildung $z(w)$ kann durch schrittweise Transformation mittels leicht übersehbarer Funktionen erreicht werden; dadurch wird die praktische Schwierigkeit der numerischen Auswertung des hyperelliptischen Abbildungsintegrals wesentlich vermindert.

§ 1. Vorbemerkungen

1. Die bekannte Transformation³⁾

$$x = w + \frac{r^2}{w}$$

bildet die obere w -Halbebene so auf die volle x -Ebene ab, daß die reelle Achse in den von $2r$ über ∞ nach $-2r$ verlaufenden reellen Verzweigungsschnitt der x -Ebene, der Halbkreis $w = re^{i\varphi}$ (mit $0 \leq \varphi \leq \pi$) in die Strecke $-2r \leq x \leq 2r$ übergeht. Zwei auf den beiden Ufern des Schnittes einander gegenüberliegende Punkte sind spiegelbildlich zu dieser Strecke gelegen; daher entsprechen ihnen nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip zwei (reelle) Punkte w_1 und w_2 , die der Bedingung

$$w_1 w_2 = r^2 \quad \dots \quad (2)$$

genügen.

2. Durch einen bestimmten Zweig der Funktion

$$\zeta = \int_0^w \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}} \quad (\text{mit } 0 < k < 1)$$

wird die obere w -Halbebene auf einen Rechtecksbereich der ζ -Ebene abgebildet⁴⁾. Den Modul k , den mit ihm durch die Gleichung $k^2 + k'^2 = 1$ verbundenen konjugierten Modul k' und die Periodizitätsmoduln

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad \text{und} \quad iK' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

können wir mit Hilfe der ϑ -Funktionen durch das (rein imaginäre) Periodenverhältnis $\tau = \frac{iK'}{K}$ ausdrücken. Dabei ist $0 \leq \frac{K'}{K} \leq \infty$ ⁵⁾. (Da hier ausschließlich die ϑ -Nullwerte verwendet werden, geben wir nur das Periodenverhältnis als Argument an.) Es ist⁶⁾

$$k(\tau) = \frac{\vartheta_2^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)}; \quad k'(\tau) = \frac{\vartheta_0^2(\tau)}{\vartheta_3^2(\tau)} \quad \dots \quad (3);$$

$$K(\tau) = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(\tau); \quad K'(\tau) = -i\tau \cdot \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2(\tau) \quad \dots \quad (4),$$

wobei

$$\vartheta_2(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\binom{2n-1}{2}}, \quad \vartheta_3(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}, \quad \vartheta_0(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \quad \dots \quad (5)$$

und $q = e^{i\pi\tau} \geq 0$ ist. Ferner gilt⁷⁾:

$$\vartheta_3^2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -i\tau \vartheta_3^2(\tau) \quad \dots \quad (6a),$$

$$\vartheta_2^2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -i\tau \vartheta_0^2(\tau) \quad \dots \quad (6b),$$

$$\vartheta_0^2\left(-\frac{1}{\tau}\right) = -i\tau \vartheta_2^2(\tau) \quad \dots \quad (6c),$$

³⁾ Vgl. [3], S. 90ff.

⁴⁾ Vgl. z. B. [4], S. 296ff.

⁵⁾ Ist $\frac{K'}{K} = 0$ bzw. $\frac{K'}{K} = \infty$, soartet das Rechteck in einen unendlich langen Parallelstreifen aus.

⁶⁾ Vgl. z. B. [4], S. 202 und 184.

⁷⁾ Vgl. [4], S. 236, Gl. (5') mit $v = 0$.

also wegen (3) und (4):

$$\left. \begin{aligned} k\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= k'(\tau), & k^*\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= k(\tau); \\ K\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= K'(\tau), & K^*\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= K(\tau) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7).$$

Da $\frac{K'}{K}$ reell vorausgesetzt wird, geht für $-i\tau = \frac{K'}{K} \rightarrow \infty$ $q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ nach Null; wegen (5) wird also $\vartheta_2 = 0$, $\vartheta_3 = 1$, $\vartheta_0 = 1$, $k = 0$.

Das Periodenverhältnis ist eine eindeutige Funktion des Moduls; mit der aus (6c) folgenden Beziehung: $kK' = \frac{\pi}{2} \cdot (-i\tau) \vartheta_2^2(\tau) = \frac{\pi}{2} \vartheta_0^2\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ und $\vartheta_0(0) = 0$ bekommen wir daher

$$\text{für } k=0: \quad K = \frac{\pi}{2}; \quad K' = \infty; \quad k'K = \frac{\pi}{2}; \quad k'K' = \infty; \quad kK = 0; \quad kK' = 0 \quad (8a)$$

und, indem wir τ durch $-\frac{1}{\tau}$ ersetzen, gemäß (7):

$$\text{für } k=1: \quad K = \infty; \quad K' = \frac{\pi}{2}; \quad k'K = 0; \quad k'K' = 0; \quad kK = \infty; \quad kK' = \frac{\pi}{2} \quad (8b).$$

Wie sich aus (5) leicht ableiten läßt, ist für jedes τ

$$\vartheta_0(\tau) \leq 1; \quad \vartheta_3(\tau) \geq 1 \quad \dots \dots \dots (9).$$

Für die doppelten Periodenverhältnisse gelten die Formeln⁸⁾:

$$\begin{aligned} 2 \vartheta_3^2(2\tau) &= \vartheta_3^2(\tau) + \vartheta_0^2(\tau), \\ 2 \vartheta_0^2(2\tau) &= \vartheta_3^2(\tau) - \vartheta_0^2(\tau). \end{aligned}$$

Lösen wir diese Gleichungen nach $\vartheta_3^2(\tau)$ und $\vartheta_0^2(\tau)$ auf und ersetzen τ durch $\frac{\tau}{2}$, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_3^2\left(\frac{\tau}{2}\right) &= \vartheta_3^2(\tau) + \vartheta_0^2(\tau), \\ \vartheta_0^2\left(\frac{\tau}{2}\right) &= \vartheta_3^2(\tau) - \vartheta_0^2(\tau) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10).$$

§ 2. Die Durchführung der Transformation $z(w)$

Die obere Halbebene \mathfrak{H} der w -Ebene soll durch eine analytische Funktion $z(w)$ auf das Innere \mathfrak{G} eines Treppenachtecks A, B, C, D, E, F, G, H der z -Ebene konform abgebildet werden. Die (reellen) Verzweigungspunkte der w -Ebene bezeichnen wir mit $a \dots h$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir

$$g = 0, \quad a = 1, \quad b = \infty \quad \dots \dots \dots (11)$$

voraussetzen. Die anderen Parameterwerte c, d, e, f, h wollen wir weiter unten noch zweckmäßig wählen. Es ist

$$-\infty < c < d < e < f < 0 < h < 1 \quad \dots \dots \dots (12).$$

Durch die lineare Funktion

$$v = \frac{w-1}{w-d} \quad \dots \dots \dots (13)$$

transformieren wir zunächst die w -Ebene auf eine v -Ebene (vgl. Bild 1). Die Verzweigungspunkte in der v -Ebene seien $a' \dots h'$.

Dann ist

$$a' = 0, \quad b' = 1, \quad \dots, \quad d' = \infty, \quad \dots, \quad g' = \frac{1}{d}.$$

Sodann soll \mathfrak{H} durch

$$x_1 = w + \frac{r_1^2}{w} \quad \dots \dots \dots (14)$$

so auf eine volle x_1 -Ebene, die obere v -Halbebene durch

$$x_2 = v + \frac{r_2^2}{v} \quad \dots \dots \dots (15)$$

⁸⁾ Siehe [5], S. 42, Gl. (6) und S. 43, Gl. (5*) mit $v = 0$.

so auf eine volle x_2 -Ebene abgebildet werden, daß die Punkte a und h , d und e , c und f bzw. b' und c' , e' und h' , f' und g' paarweise zusammenfallen. Nach Gl. (2) ist dies nur möglich, wenn die Verzweigungspunkte die Gleichungen erfüllen:

$$h = de \quad (16a),$$

$$h = cf \quad (16b)$$

und (wegen $b' = 1$): $c' = e'h' = f'g'$, was wir mittels (13) und (11) umformen können in

$$\frac{c-1}{c-d} = \frac{e-1}{e-d} \cdot \frac{h-1}{h-d} \quad (16c),$$

$$\frac{c-1}{c-d} = \frac{f-1}{f-d} \cdot \frac{1}{d} \quad (16d).$$

Durch diese Gleichungen sollen die noch freien Parameterwerte c , d , e , f , h eingeschränkt werden.

Für r_1 und r_2 gilt:

$$r_1^2 = h; \quad r_2^2 = \frac{c-1}{c-d} \quad (17).$$

Lösen wir (16a), (16b) und (16c) nach den Veränderlichen d und e auf, so erhalten wir die drei Bedingungen:

$$c = \frac{d(1+e)}{1+d}, \quad f = \frac{e(1+d)}{1+e}, \quad h = de \quad (18),$$

die den folgenden Transformationen zugrundeliegen. Wie man durch Einsetzen bestätigt, erfüllen sie auch die Gl. (16d).

Die Größen d und e sollen nur der Einschränkung

$$-1 < d < e < 0 \quad (19)$$

unterworfen sein. Es ist leicht einzusehen, daß dann auch die Ungleichungen (12) gelten.

Setzen wir (17) in (14) bzw. (15) ein, so folgt unter Berücksichtigung der Gl. (18) und (13)

$$x_1 = \frac{w^2 + de}{w},$$

$$x_2 = \frac{d(d-e)v^2 + 1 - de}{d(d-e)v} = \frac{d(d-e)(w-1)^2 + (1-de)(w-d)^2}{d(d-e)(w-1)(w-d)}.$$

Auf die x_1 - bzw. x_2 -Ebene üben wir die Transformationen aus:

$$s^2 = \frac{x_1 - x_1(a)}{x_1 - x_1(d)}; \quad t^2 = \frac{x_2 - x_2(b)}{x_2 - x_2(g)}.$$

Wegen $x_1(a) = 1 + de = 1 + h$ und $x_1(d) = d + e$ wird

$$s^2 = \frac{w^2 - (1+h)w + h}{w^2 - (d+e)w + de},$$

$$s^2 = \frac{(w-1)(w-h)}{(w-d)(w-e)} \quad (20a)$$

Mit

$$x_2(b) = x_2(\infty) = \frac{1 - 2de + d^2}{d(d-e)} \quad \text{und} \quad x_2(g) = x_2(0) = \frac{2d - e - d^2e}{d(d-e)}$$

erhalten wir nach einer einfachen Umformung entsprechend

$$t^2 = \frac{w(1+d) - d(1+e)}{w[w(1+e) - e(1+d)]} = \frac{1+d}{1+e} \cdot \frac{w - \frac{d(1+e)}{1+d}}{w \left[w - \frac{e(1+d)}{1+e} \right]}$$

oder wegen (18):

$$t^2 = \frac{1-f}{1-c} \cdot \frac{w-c}{w(w-f)} \quad (20b).$$

Wir setzen

$$k_1 = \frac{1}{|s(c)|} = \sqrt{\frac{(c-d)(c-e)}{(c-1)(c-h)}},$$

was mit (18):

$$k_1 = \frac{e-d}{1-de} \dots \dots \dots (21a)$$

ergibt, und entsprechend

$$k_2 = \frac{1}{|t(e)|} = \sqrt{\frac{(1-c)e(e-f)}{(1-f)(e-c)}},$$

woraus

$$k_2 = -e \dots \dots \dots (21b)$$

folgt. Wegen (19) ist $(1+d)(1-e) = 1-de-(e-d) > 0$, also $\frac{e-d}{1-de} < 1$ und deshalb $0 < k_1 < 1$; offenbar ist auch $0 < k_2 < 1$.

Die s -Ebene bilden wir durch

$$z_1 = \alpha_1 \int_{s(a)}^s \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k_1^2\sigma^2)}} \dots \dots \dots (22a)$$

auf eine z_1 -Ebene, die t -Ebene durch

$$z_2 = \alpha_2 \int_{t(a)}^t \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k_2^2\tau^2)}} \dots \dots \dots (22b)$$

auf eine z_2 -Ebene ab. Dabei sei

$$\alpha_1 = \frac{1-d}{1-de} \sqrt{(1+d)(1+e)} \cdot C \dots \dots \dots (23a),$$

$$\alpha_2 = \sqrt{(1+d)(1+e)} \cdot C \dots \dots \dots (23b)$$

und C eine willkürliche positive Konstante⁹⁾.

Zunächst betrachten wir das Integral:

$$J_1 = \int \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k_1^2s^2)}} \dots \dots \dots (24a),$$

das wir durch w ausdrücken wollen. Unter Berücksichtigung von (18) erhalten wir nach einer einfachen Rechnung:

$$\begin{aligned} 1-s^2 &= \frac{(1-d)(1-e)w}{(w-d)(w-e)}, \\ 1-k_1^2s^2 &= \frac{(1-de)^2(w-d)(w-e)-(e-d)^2(w-1)(w-h)}{(1-de)^2(w-d)(w-e)} \\ &= \frac{(1-d^2)(1-e^2)}{(1-de)^2} \cdot \frac{w^2+w \frac{d+e+4de+d^2e+de^2}{(1+d)(1+e)} + de}{(w-d)(w-e)}, \\ 1-k_1^2s^2 &= \frac{(1-d^2)(1-e^2)}{(1-de)^2} \cdot \frac{(w-c)(w-f)}{(w-d)(w-e)} \end{aligned}$$

und

$$2s ds = (1-d)(1-e) \cdot \frac{w^2-de}{(w-d)^2(w-e)^2} dw.$$

Es ist also

$$J_1 = \frac{1}{2} \int \frac{2s ds}{s \sqrt{(1-s^2)(1-k_1^2s^2)}} = C_1 \cdot \int \frac{(w^2-de) dw}{\sqrt{w(w-1)(w-c)(w-d)(w-e)(w-f)(w-h)}}$$

mit

$$C_1 = \frac{1-de}{2 \sqrt{(1+d)(1+e)}}.$$

Wir setzen

$$J_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k_2^2t^2)}} \dots \dots \dots (24b).$$

Über den Zweig der Wurzel werden wir sogleich verfügen.

⁹⁾ Die Zweckmäßigkeit dieses Ansatzes wird in der Schlußbemerkung dieses Paragraphen klar werden.

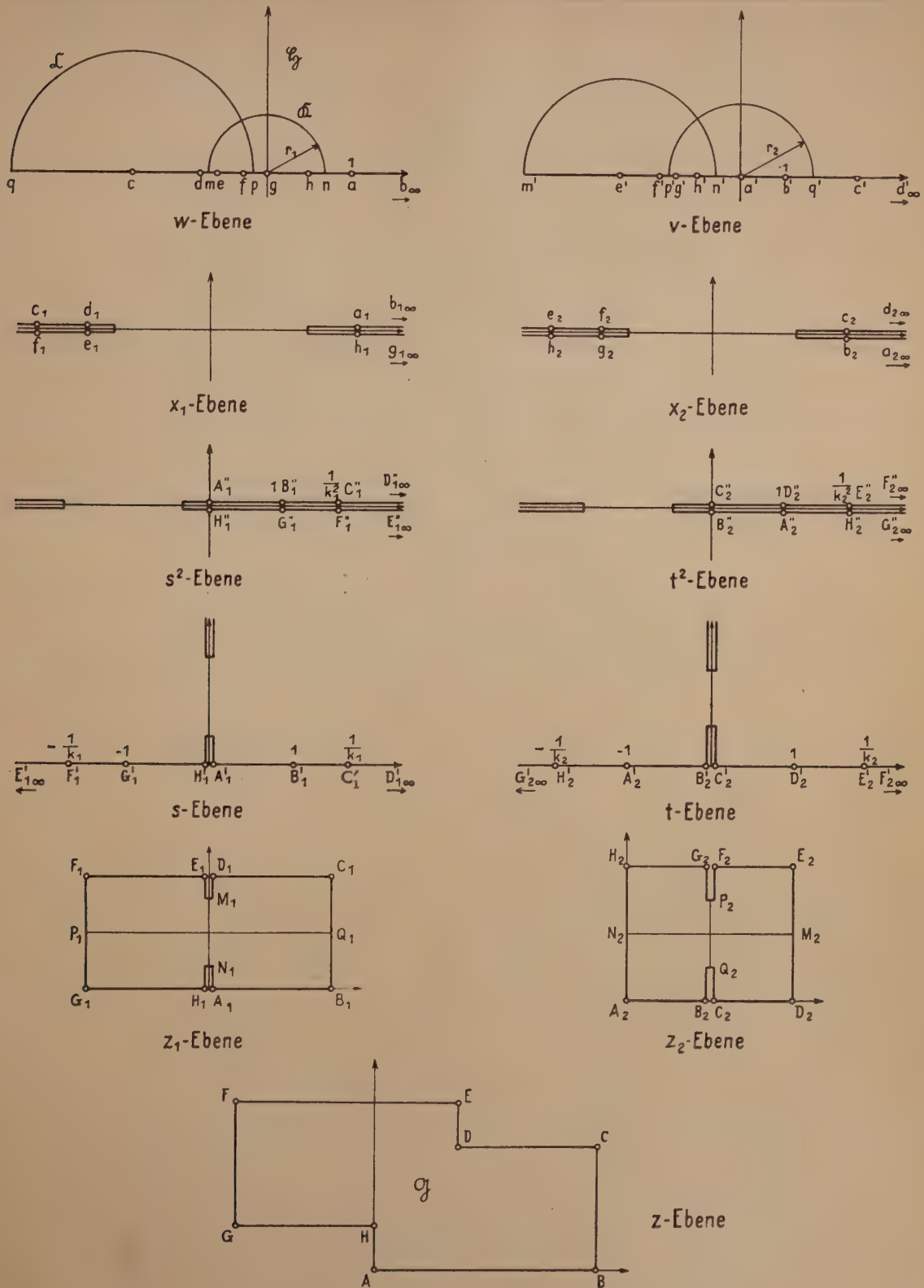


Bild 1

Ähnlich wie oben folgt:

$$1 - t^2 = \frac{(w-1)(w-d)}{w(w-f)}, \quad 1 - k_2^2 t^2 = \frac{(w-e)(w-h)}{w(w-f)},$$

$$2t dt = -\frac{1-f}{1-c} \cdot \frac{w^2 - 2cw + cf}{w^2(w-f)^2} dw,$$

also

$$J_2 = \frac{1}{2} \int \frac{2t \, dt}{t \sqrt{(1-t^2)(1-k_2^2 t^2)}} = C_2 \cdot \int \frac{(w^2 - 2cw + cf) \, dw}{\sqrt{w(w-1)(w-c)(w-d)(w-e)(w-f)(w-h)}}.$$

Wir verwenden den Zweig der Wurzel, für welchen C_2 positiv wird:

$$C_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-f}{1-c}} \quad \text{oder, in } d \text{ und } e \text{ ausgedrückt,} \quad C_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+d}{1+e}}.$$

Es ist also:

$$z_1 = \alpha_1 C_1 \int_1^w \frac{(\omega^2 - de) \, d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-c)(\omega-d)(\omega-e)(\omega-f)(\omega-h)}},$$

$$z_2 = \alpha_2 C_2 \int_1^w \frac{(\omega^2 - 2c\omega + cf) \, d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-c)(\omega-d)(\omega-e)(\omega-f)(\omega-h)}}.$$

Mit (23) wird $\alpha_1 C_1 = \frac{1-d}{2} C$, $\alpha_2 C_2 = \frac{1+d}{2} C$ und damit wegen (16a) und (16b):

$$\alpha_1 C_1 (\omega^2 - de) + \alpha_2 C_2 (\omega^2 - 2c\omega + cf) = [\omega^2 - (d+de)\omega + d \cdot de] C = (\omega - d)(\omega - h) C.$$

Durch Überlagerung von $z_1(w)$ und $z_2(w)$ bekommen wir endgültig:

$$z(w) = z_1(w) + z_2(w) \quad \dots \quad (25),$$

$$z(w) = \int_1^w \frac{[\alpha_1 C_1 (\omega^2 - de) + \alpha_2 C_2 (\omega^2 - 2c\omega + cf)] \, d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-c)(\omega-d)(\omega-e)(\omega-f)(\omega-h)}}$$

$$= C \int_1^w \frac{(\omega - d)(\omega - h) \, d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-c)(\omega-d)(\omega-e)(\omega-f)(\omega-h)}},$$

$$z(w) = C \int_1^w \frac{\sqrt{(\omega - d)(\omega - h)} \, d\omega}{\sqrt{\omega(\omega-1)(\omega-c)(\omega-e)(\omega-f)}} \quad \dots \quad (26).$$

Damit haben wir — wie es sein muß — die Schwarz-Christoffelsche Formel für unsere Achtecksabbildung erhalten. Die einzelnen Transformationen sind in Bild 1 veranschaulicht¹⁰⁾. Sie ergeben sich leicht aus den Abbildungsgleichungen. Aus (26) erkennt man, daß D und H die einspringenden Ecken des Achtecksbereiches \mathfrak{G} sind. Die Schlitzte der z_1 - und z_2 -Ebene können infolge der Bedingungen (23a) und (23b) für α_1 und α_2 keine von den Ecken D und H von \mathfrak{G} ausgehenden Einschnitte erzeugen. [Vgl. im Gegensatz hierzu Gl. (42), § 6,4 und Bild 14!]

§ 3. Die Längen der Achteckseiten

K_1, iK' und K_2, iK'_2 seien die Periodizitätsmoduln der elliptischen Integrale $J_1(s)$ bzw. $J_2(t)$ der Gl. (24a) und (24b). Dann erhalten wir aus Gl. (22a) und (22b) die Verzweigungspunkte in der z_1 - und z_2 -Ebene und aus (25) die Polygonecken in der z -Ebene (s. Tabelle 1).

Tabelle 1

	z_1	z_2	z
A	0	0	0
B	$\alpha_1 K_1$	$\alpha_2 K_2$	$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2$
C	$\alpha_1 (K_1 + iK'_1)$	$\alpha_2 K_2$	$\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + i\alpha_1 K'_1$
D	$\alpha_1 iK'_1$	$\alpha_2 \cdot 2K_2$	$2\alpha_2 K_2 + i\alpha_1 K'_1$
E	$\alpha_1 iK_1$	$\alpha_2 (2K_2 + iK'_2)$	$2\alpha_2 K_2 + i(\alpha_1 K'_1 + \alpha_2 K'_2)$
F	$\alpha_1 (-K_1 + iK'_1)$	$\alpha_1 (K_2 + iK'_2)$	$-\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + i(\alpha_1 K'_1 + \alpha_2 K'_2)$
G	$-\alpha_1 K_1$	$\alpha_2 (K_2 + iK'_2)$	$-\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + i\alpha_2 K'_2$
H	0	$\alpha_2 iK'_2$	$i\alpha_2 K'_2$

¹⁰⁾ Bild 1 ist der Deutlichkeit halber nicht maßstabsgetreu gezeichnet.

Aus der Tabelle gewinnen wir für die Längen der Achteckseiten die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \overline{AB} &= \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 \\ \overline{BC} &= \alpha_1 K'_1 \\ \overline{CD} &= \alpha_1 K_1 - \alpha_2 K_2^{11)} \\ \overline{DE} &= \alpha_2 K'_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (27);$$

ferner wird

$$\left. \begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{EF} \\ \overline{BC} &= \overline{FG} \\ \overline{CD} &= \overline{GH} \\ \overline{DE} &= \overline{HA} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (28);$$

dies besagt, daß die Achtecke in bezug auf einen Mittelpunkt symmetrisch sind.

Die Gl. (27) können wir noch einfach umformen.

Nach (23) ist $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1-d}{1-de}$ oder, da aus (21a) und (21b) die Gleichungen

$$e = -k_2; \quad d = -\frac{k_1 + k_2}{1 + k_1 k_2} \dots \dots \dots (29)$$

folgen,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1+k_1}{1-k_2} \dots \dots \dots (30).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (27) ein, so erhalten wir mit einem positiven Proportionalitätsfaktor $\varrho = \frac{1-k_2}{\alpha_2}$:

$$\begin{aligned} \varrho \overline{AB} &= (1+k_1) K_1 + (1-k_2) K_2, \\ \varrho \overline{BC} &= (1+k_1) K'_1, \\ \varrho \overline{CD} &= (1+k_1) K_1 - (1-k_2) K_2, \\ \varrho \overline{DE} &= (1-k_2) K'_2. \end{aligned}$$

Nach Gl. (3) und (4) drücken wir die Seitenlängen in ϑ -Funktionen aus. Mit $\varrho^* = \frac{2}{\pi} \varrho$ wird

$$\begin{aligned} \varrho^* \overline{AB} &= [\vartheta_3^2(\tau_1) + \vartheta_2^2(\tau_1)] + [\vartheta_3^2(\tau_2) - \vartheta_2^2(\tau_2)], \\ \varrho^* \overline{BC} &= (-i\tau_1)[\vartheta_3^2(\tau_1) + \vartheta_2^2(\tau_1)], \\ \varrho^* \overline{CD} &= [\vartheta_3^2(\tau_1) + \vartheta_2^2(\tau_1)] - [\vartheta_3^2(\tau_2) - \vartheta_2^2(\tau_2)], \\ \varrho^* \overline{DE} &= (-i\tau_2)[\vartheta_3^2(\tau_2) - \vartheta_2^2(\tau_2)]. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \tau_1^* &= \left(\frac{\tau_1}{2}\right), & k_1^* &= k\left(\frac{\tau_1}{2}\right), & k_1^{*'} &= k'\left(\frac{\tau_1}{2}\right), & K_1^* &= K\left(\frac{\tau_1}{2}\right), & K_1^{*'} &= K'\left(\frac{\tau_1}{2}\right), \\ \tau_2^* &= \left(\frac{\tau_2}{2}\right), & k_2^* &= k\left(\frac{\tau_2}{2}\right), & k_2^{*'} &= k'\left(\frac{\tau_2}{2}\right), & K_2^* &= K\left(\frac{\tau_2}{2}\right), & K_2^{*'} &= K'\left(\frac{\tau_2}{2}\right) \end{aligned} \right\} (31),$$

so lassen sich diese Gleichungen durch (10) vereinfachen:

$$\left. \begin{aligned} \varrho^* \overline{AB} &= \vartheta_3^2(\tau_1^*) + \vartheta_0^2(\tau_2^*), \\ \varrho^* \overline{BC} &= -2i\tau_1^* \vartheta_3^2(\tau_1^*), \\ \varrho^* \overline{CD} &= \vartheta_3^2(\tau_1^*) - \vartheta_0^2(\tau_2^*), \\ \varrho^* \overline{DE} &= -2i\tau_2^* \vartheta_0^2(\tau_2^*) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (32).$$

¹¹⁾ Daß auf jeden Fall $\alpha_1 K_1 > \alpha_2 K_2$ ist, folgt sowohl aus der Tatsache, daß D eine einspringende Ecke ist, als auch aus Gl. (32) in Verbindung mit (9).

Dafür können wir auch schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \varrho \overline{AB} &= K_1^* + k_2^{*'} K_2^*, \\ \varrho \overline{BC} &= 2 K_1^{*'}, \\ \varrho \overline{CD} &= K_1^* - k_2^{*'} K_2^*, \\ \varrho \overline{DE} &= 2 k_2^{*'} K_2^* \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33).$$

Mit (6a) finden wir aus (32):

$$\varrho^* [\overline{BC} - (\overline{AB} - \overline{CD})] = 2 \vartheta_3^2 \left(-\frac{1}{\tau_1^*} \right) - 2 \vartheta_0^2 (\tau_2^*),$$

was wegen (9) ≥ 0 ist; d. h.:

$$\overline{BC} \geq \overline{AB} - \overline{CD}.$$

Die vier Gleichungen (32) bzw. (33) enthalten drei unabhängige Veränderliche, nämlich τ_1^* , τ_2^* und ϱ . Eliminieren wir diese, so bekommen wir zu den Gl.(28) noch eine weitere Bedingung für die Achteckseiten. Nach (33) ist

$$K_1^* = \frac{\pi}{2} \vartheta_3^2 (\tau_1^*) = \frac{\varrho}{2} (\overline{AB} + \overline{CD}) \dots \dots \dots (34),$$

$$k_2^{*'} K_2^* = \frac{\pi}{2} \vartheta_0^2 (\tau_2^*) = \frac{\varrho}{2} (\overline{AB} - \overline{CD}) \dots \dots \dots (35)$$

und mit (31):

$$-2 i \tau_1^* = \frac{K_1'}{K_1} = \frac{2 \overline{BC}}{\overline{AB} + \overline{CD}} \dots \dots \dots (36),$$

$$-2 i \tau_2^* = \frac{K_2'}{K_2} = \frac{2 \overline{DE}}{\overline{AB} - \overline{CD}} \dots \dots \dots (37).$$

Setzen wir (36) in (34) und (37) in (35) ein, so erhalten wir

$$\frac{\pi}{2} \vartheta_3^2 \left(i \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} + \overline{CD}} \right) = \frac{\varrho}{2} (\overline{AB} + \overline{CD}), \quad \frac{\pi}{2} \vartheta_0^2 \left(i \frac{\overline{DE}}{\overline{AB} - \overline{CD}} \right) = \frac{\varrho}{2} (\overline{AB} - \overline{CD})$$

und durch Division dieser beiden Gleichungen:

$$\frac{\vartheta_3^2 \left(i \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} + \overline{CD}} \right)}{\vartheta_0^2 \left(i \frac{\overline{DE}}{\overline{AB} - \overline{CD}} \right)} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{\overline{AB} - \overline{CD}} \dots \dots \dots (38a).$$

Durch Anwendung von (6) können wir diesen Ausdruck auf verschiedene Art umformen:

$$\frac{\vartheta_3^2 \left(i \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{\overline{BC}} \right)}{\vartheta_0^2 \left(i \frac{\overline{DE}}{\overline{AB} - \overline{CD}} \right)} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} - \overline{CD}} \dots \dots \dots (38b);$$

$$\frac{\vartheta_3^2 \left(i \frac{\overline{BC}}{\overline{AB} + \overline{CD}} \right)}{\vartheta_2^2 \left(i \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{\overline{DE}} \right)} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{\overline{DE}} \dots \dots \dots (38c);$$

$$\frac{\vartheta_3^2 \left(i \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{\overline{BC}} \right)}{\vartheta_2^2 \left(i \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{\overline{DE}} \right)} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} \dots \dots \dots (38d).$$

Sind drei Seitenlängen (oder Kombinationen wie $\overline{AB} + \overline{CD}$) vorgeschrieben, so läßt sich die abhängige Größe aus einer dieser vier Gleichungen ermitteln.

Um die geometrische Bedeutung der Bedingung (38) zu erkennen, kann man aus den Gleichungen (33) eine Anzahl von Achtecken berechnen. Es ist am zweckmäßigsten, hierbei k_1^{*2} und k_2^{*2} als unabhängige Veränderliche zu verwenden, da die Größen K und K' als Funktionen von k^2 in Zahlentafeln angegeben sind¹²⁾. Der Faktor ϱ bewirkt nur eine Ähnlichkeitstransformation; er soll so angenommen werden, daß $\overline{BC}=1$ wird.

Aus (8b) und (33) folgt

$$\text{für } k_2^{*2}=1: \qquad \varrho \overline{AB}=\varrho \overline{CD}=K_1^* \quad \text{und} \quad \varrho \overline{DE}=0 \quad (39).$$

Tabelle 2

$k_1^{*2} \backslash k_2^{*2}$	0	0,007	0,270	0,700	0,900	0,970	0,992	0,9993	1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	\overline{CD}
	1,000	0	0	0	0	0	0	0	0	\overline{DE}
0,007	0,000	0,001	0,018	0,056	0,098	0,133	0,159	0,186	0,203	\overline{CD}
	∞	0,997	0,484	0,242	0,132	0,071	0,036	0,011	0	\overline{DE}
0,270	0,024	0,024	0,056	0,123	0,196	0,257	0,304	0,352	0,382	\overline{CD}
	∞	1,759	0,854	0,428	0,232	0,125	0,064	0,019	0	\overline{DE}
0,700	0,147	0,148	0,188	0,274	0,368	0,446	0,506	0,567	0,606	\overline{CD}
	∞	2,251	1,084	0,548	0,298	0,160	0,083	0,024	0	\overline{DE}
0,900	0,312	0,313	0,356	0,447	0,547	0,630	0,694	0,758	0,799	\overline{CD}
	∞	2,393	1,163	0,582	0,316	0,170	0,087	0,026	0	\overline{DE}
0,970	0,501	0,502	0,545	0,638	0,739	0,824	0,889	0,955	0,997	\overline{CD}
	∞	2,438	1,184	0,593	0,322	0,173	0,089	0,026	0	\overline{DE}
0,992	0,710	0,711	0,754	0,848	0,950	1,035	1,101	1,167	1,209	\overline{CD}
	∞	2,452	1,191	0,596	0,324	0,174	0,089	0,026	0	\overline{DE}
0,9976	0,901	0,902	0,946	1,040	1,142	1,227	1,293	1,359	1,401	\overline{CD}
	∞	2,455	1,193	0,597	0,324	0,174	0,090	0,026	0	\overline{DE}
0,9993	1,097	1,098	1,142	1,236	1,338	1,423	1,489	1,555	1,597	\overline{CD}
	∞	2,456	1,193	0,597	0,324	0,174	0,090	0,026	0	\overline{DE}
0,9998	1,297	1,298	1,341	1,435	1,537	1,623	1,688	1,755	1,797	\overline{CD}
	∞	2,457	1,193	0,598	0,325	0,174	0,090	0,026	0	\overline{DE}
0,99995	1,517	1,518	1,562	1,656	1,758	1,844	1,909	1,975	2,017	\overline{CD}
	∞	2,457	1,193	0,598	0,325	0,174	0,090	0,026	0	\overline{DE}
0,999990	1,774	1,774	1,818	1,912	2,014	2,100	2,165	2,231	2,274	\overline{CD}
	∞	2,457	1,193	0,598	0,325	0,174	0,090	0,026	0	\overline{DE}
0,999998	2,030	2,031	2,074	2,168	2,270	2,356	2,421	2,487	2,530	\overline{CD}
	∞	2,457	1,193	0,598	0,325	0,174	0,090	0,026	0	\overline{DE}
1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	\overline{CD}
	∞	2,457	1,193	0,598	0,325	0,174	0,090	0,026	0	\overline{DE}

In Tabelle 2 sind die Seitenlängen \overline{CD} und \overline{DE} für verschiedene Werte von k_1^{*2} und k_2^{*2} angegeben. Die zugehörige Seite \overline{AB} läßt sich aus der Gleichung:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \frac{2 K_1^*}{\varrho} \quad (40)$$

leicht bestimmen, da ja wegen (39) der zu k_1^{*2} gehörige Wert $\frac{K_1^*}{\varrho}$ jeweils in der letzten Spalte auftritt. Mit $\overline{BC}=1$ und Gl. (28) erhält man also für jedes angegebene Wertepaar k_1^{*2} , k_2^{*2} ein Treppenachteck.

Im x - y -Koordinatensystem des Bildes 2 ist $x=\overline{DE}$, $y=\overline{CD}$. Entsprechend der Tabelle 2 liefert jedes Paar k_1^{*2} , k_2^{*2} einen Punkt. Die Punkte $k_1^{*2} = \text{const}$ wurden durch Kurven verbunden,

¹²⁾ Siehe [2], S. 61ff.

die [für $k_2^{*2}=1$ gemäß (39)] die y -Achse in

$$y_0 = \frac{K_1^*}{\varrho} \quad (41)$$

treffen und (da für $k_2^{*2}=0$ $\overline{DE} = \infty$ wird) zur x -Achse parallele Asymptoten besitzen. Diese sind am rechten Rand der Abbildung angedeutet.

Der Ecke B entspricht der Punkt $(-1; 0)$, der Ecke C der Nullpunkt; $D(0; y)$ kann auf der y -Achse beliebig angenommen werden, die Abszisse von $E(x; y)$ ist ebenfalls willkürlich. Mit (28), $EF = AB$, erhalten wir aus (40):

$$\overline{CD} + EF = 2 y_0.$$

Dadurch ist der Punkt $F(x; y_F)$ bestimmt; denn $y_0 = \frac{K_1^*}{\varrho}$ kann man für jeden einem Punkt E entsprechenden Wert von k_1^{*2} durch graphische Interpolation näherungsweise erhalten. In Bild 2 ist für ein spezielles Beispiel der Streckenzug $CDEF$ eingezeichnet.

Unterscheidet sich k_1^{*2} nur wenig von 1, so ist mit großer Genauigkeit $2 K_1^{*2} = \pi$, also wegen $BC = 1$ und Gl.(33):

$$\varrho = \pi.$$

Halten wir nun k_2^{*2} fest, während $k_1^{*2} \approx 1$ veränderlich ist, so bekommen wir aus (33) und (41):

$$x = \overline{DE} \approx \frac{2 k_2^{*2} K_2^{*2}}{\pi},$$

$$y_0 - y = \frac{K_1^*}{\varrho} - \overline{CD} \approx \frac{k_2^{*2} K_2^{*2}}{\pi}.$$

Dies besagt: Ist y größer als eine gewisse Schranke und $x = \text{const}$, so ist die Differenz $y_0 - y$ unabhängig von k_1^{*2} d.h.:

Für hinreichend große Werte von k_1^{*2} gehen die Kurven $k_1^{*2} = \text{const}$ durch Parallelverschiebung auseinander hervor. Aus Tabelle 2 ersieht man, daß es bei einer Genauigkeit auf drei Dezimalstellen genügt, die Schranke $k_1^{*2} = 0,9998$ bzw. $y = 1,8$ zu wählen.

Bild 2 soll nur die Form der auf unsere Methode abbildbaren Achtecke erkennen lassen. Für die Auffindung der einem vorgegebenen Polygon entsprechenden Moduln k_1 und k_2 ist sie ohne Bedeutung (vgl. § 5).

Es läßt sich zeigen, daß die durch die beiden orthogonalen Halbkreise

$$\Re \equiv w = \sqrt{de} \cdot e^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi), \quad \Im \equiv w = c + \sqrt{(c-1)(c-d)} \cdot e^{i\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

und die reelle Achse der w -Ebene gebildeten Kreisbogendreiecke in die vier durch die Strecken P_1Q_1 und M_1N_1 bzw. P_2Q_2 und M_2N_2 getrennten Teilrechtecke der z_1 - bzw. z_2 -Ebene übergehen. Bei der praktischen Durchführung der Transformation genügt es daher, eines dieser Dreiecke durch $z_1(w)$ bzw. $z_2(w)$ auf je ein Rechteck der z_1 - und z_2 -Ebene abzubilden. Die Abbildung der ganzen Halbebene \Im erhält man durch Spiegelung an den entsprechenden Strecken.

Das Prinzip unserer Achtecksabbildung bestand darin, daß wir die w -Halbebene \Im auf zwei mit je zwei geradlinigen Schlitten versehene Rechtecke der z_1 - bzw. z_2 -Ebene abbildeten und diese überlagerten. Die Seitenlängen des Achtecks mußten hierbei gewisse Gleichungen erfüllen. Jedem Verzweigungspunkt der w -Ebene entsprach je ein Eckpunkt der beiden geschlitzten Rechtecke. Diese Zuordnung erscheint willkürlich. Zunächst ist anzunehmen, daß bei geeigneter Änderung der Rechteckseiten durch zyklische Vertauschung der Buchstaben in einer oder beiden Ebenen — gegebenenfalls bei gleichzeitiger Drehung der Rechtecke um den Winkel $\pi/2$ — die Überlagerung wieder Treppenachtecke liefert, deren Seitenlängen jedoch anderen Bedingungen genügen. Bei ausführlicher Erörterung dieser Frage erkennt man aber, daß sich auf diese Methode außer einem Spezialfall ($\tau_1 = \tau_2$) der besprochenen Achtecksabbildung nur die zu den behandelten Achtecken spiegelbildlichen Polygone ergeben. Wir erhalten also keine wesentlich neue Abbildung.

§ 4. Ausartungen

1. Nimmt einer der beiden Moduln k_1^* und k_2^* der Gl. (31) den Wert Null oder 1 an, soartet das Achteck aus. Unter Berücksichtigung von (8a) und (8b) ergeben sich aus (33) und (28) die in Tabelle 3 zusammengestellten vier Möglichkeiten.

Tabelle 3.

	a) $k_1^* = 0$	b) $k_1^* = 1$	c) $k_2^* = 0$	d) $k_2^* = 1$
$\varrho \overline{AB} = \varrho \overline{EF}$	$\frac{\pi}{2} + k_2^{*'} K_2^*$	∞	$K_1^* + \frac{\pi}{2}$	K_1^*
$\varrho \overline{BC} = \varrho \overline{FG}$	∞	π	$2 K_1^{*'}$	$2 K_1^{*'}$
$\varrho \overline{CD} = \varrho \overline{GH}$	$\frac{\pi}{2} - k_2^{*'} K_2^*$	∞	$K_1^* - \frac{\pi}{2}$	K_1^*
$\varrho \overline{DE} = \varrho \overline{HA}$	$2 k_2^{*'} K_2^{*'}$	$2 k_2^{*'} K_2^{*'}$	∞	0

Der Fall d) ist unbedeutend, da er offenbar nur Rechtecke liefert. In den übrigen Fällen können wir jeweils eine Länge gleich 1 setzen. Von den anderen endlichen Längen ist nur eine unabhängig, da ja nur mehr ein Modul veränderlich ist.



Bild 3a

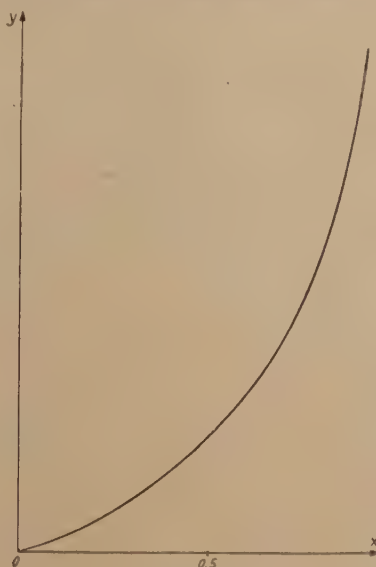


Bild 3b



Bild 3c

Tabelle 4a: $k_1^* = 0$; $\overline{GH} + \overline{AB} = 1$

k_2^{*2}	0	0,007	0,270	0,700	0,900	0,970	0,992	0,9993	1
$x = \overline{GH}$	0	0,001	0,044	0,138	0,241	0,326	0,392	0,458	0,500
$y = \overline{HA}$	∞	2,457	1,193	0,598	0,325	0,174	0,090	0,026	0

Tabelle 4b: $k_1^* = 1$; $\overline{BC} = 1$

k_2^{*2}	0	0,007	0,270	0,700	0,900	0,970	0,992	0,9993	1
$x = \overline{AB} - \overline{CD}$	1	0,998	0,911	0,724	0,519	0,348	0,217	0,084	0
$y = \overline{DE} - \overline{HA}$	∞	2,457	1,193	0,598	0,325	0,174	0,090	0,026	0

Tabelle 4c: $k_2^* = 0$; $\overline{AB} - \overline{CD} = 1$

k_1^{*2}	0	0,007	0,270	0,500	0,700	0,900	0,970	0,992	0,9976	1
$x = \overline{CD}$	0	0,001	0,033	0,090	0,161	0,321	0,505	0,712	0,902	∞
$y = \overline{BC} - 1$	∞	1,465	0,397	0,180	0,091	0,026	0,008	0,002	0,001	0

Die Tabellen 4a, 4b und 4c geben etliche Wertepaare an, durch die je ein ausgeartetes Polygon bestimmt ist. In den Bildern 3a, 3b und 3c sind mit Hilfe der den Tabellen zu entnehmenden Werte die Kurven $y(x)$ gezeichnet. Ihre geometrische Bedeutung für die Gestalt der

ausgearteten Achtecke ist aus den Bildern 4a, 4b und 4c zu erkennen: Jede dieser Kurven ist der geometrische Ort für eine bestimmte Polygonecke, nämlich im Fall a) für H , im Fall b) für E und im Fall c) für C .

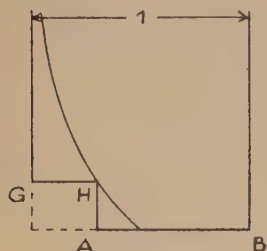


Bild 4a

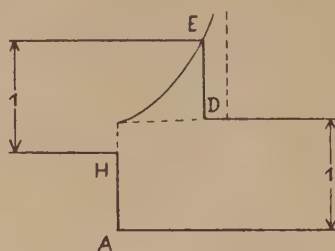


Bild 4b

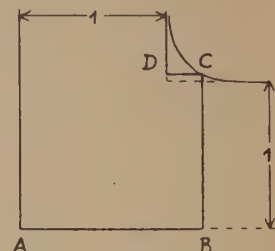


Bild 4c

2. Bei der von Bergmann behandelten Abbildung von Treppensechsecken (A' , B' , C' , D' , E' , F') ergeben sich die Seitenlängen¹³⁾:

$$\begin{array}{l|l} \varrho \overline{A'B'} = \hat{K}'_1 + \hat{K}'_2 & \varrho \overline{D'E'} = \hat{K}'_1 - \hat{K}'_2 \\ \varrho \overline{B'C'} = \hat{K}'_1 + \hat{K}'_2 & \varrho \overline{E'F'} = -\hat{K}'_1 + \hat{K}'_2 \\ \varrho \overline{C'D'} = 2\hat{K}'_1 & \varrho \overline{F'A'} = 2\hat{K}'_2 \end{array}$$

wobei, falls $\overline{D'E'} > 0$ ist, die einspringende Ecke in E' liegt. Auch hier gibt es wieder grundsätzlich vier Möglichkeiten von Ausartungen, die wir in Tabelle 5 zusammenstellen.

Tabelle 5

	$\alpha) \hat{k}_1 = 0$	$\beta) \hat{k}_1 = 1$	$\gamma) \hat{k}_2 = 0$	$\delta) \hat{k}_2 = 1$
$\varrho \overline{A'B'}$	∞	$\frac{\pi}{2} + \hat{K}'_2$	∞	$\hat{K}'_1 + \frac{\pi}{2}$
$\varrho \overline{B'C'}$	$\frac{\pi}{2} + \hat{K}'_2$	∞	$\hat{K}'_1 + \frac{\pi}{2}$	∞
$\varrho \overline{C'D'}$	∞	π	$2\hat{K}'_1$	$2\hat{K}'_1$
$\varrho \overline{D'E'}$	$\frac{\pi}{2} - \hat{K}'_2$	∞	$\hat{K}'_1 - \frac{\pi}{2}$	$-\infty$
$\varrho \overline{E'F'}$	$-\infty$	$-\frac{\pi}{2} + \hat{K}'_2$	∞	$-\hat{K}'_1 + \frac{\pi}{2}$
$\varrho \overline{F'A'}$	$2\hat{K}'_2$	$2\hat{K}'_2$	π	∞

In den Fällen $\alpha)$ und $\delta)$ bekommen wir nur ausgeartete Vierecke, deren Abbildung nichts Neues darstellt. Ersetzen wir bei $\beta)$ \hat{K}'_2 durch \hat{K}'_1 , \hat{K}'_2 durch \hat{K}'_1 , so erhalten wir dieselben Seitenlängen wie im Fall $\gamma)$, nur in der entgegengesetzten Reihenfolge. Dies bedeutet, daß die durch $\beta)$ bzw. $\gamma)$ bestimmten Polygone durch Spiegelung auseinander hervorgehen. Mit $B' = A$, $C' = B$, $D' = C$, $E' = D$ erweist sich $\gamma)$ als mit dem Fall c) ($\hat{k}_2^* = 0$) der oben besprochenen ausgearteten Achtecke identisch, wie man durch Vergleich mit Tabelle 3 erkennt.

§ 5. Die praktische Durchführung der Abbildung

Um die Abbildung der w -Halbebene \mathfrak{H} auf ein Treppenachteck, das den Bedingungen (28) und (38) genügt¹⁴⁾, praktisch durchzuführen, lösen wir zunächst das Parameterproblem: Aus den gegebenen Seitenlängen erhalten wir mit den Gl. (36) und (37) die Größen K'_1/K_1 und K'_2/K_2 . In der Zahlentafel [2], in der K'/K als Funktion von k^2 angegeben ist, finden wir k_1^2 und k_2^2 . (29) liefert die Verzweigungspunkte d und e , aus denen wir durch (18) c , f und h bestimmen können. Damit sind sämtliche Verzweigungspunkte bekannt. K'_1 ist als Funktion von k_1^2 ebenfalls der Tafel [2] zu entnehmen; aus (27) läßt sich somit α_1 , aus (30) α_2 und aus (23b) die (für die Transformation nicht erforderliche) Konstante C der Abbildungsgleichung (26) berechnen.

Die Transformation eines Punktes w^* von \mathfrak{H} in die z -Ebene führen wir schrittweise durch: Mit Gl. (20a) und (20b) erhalten wir $s(w^*)$ und $t(w^*)$ und sodann aus (22a) bzw. (22b) die Punkte $z_1(w^*)$ und $z_2(w^*)$. Da keine Tafeln der elliptischen Integrale für komplexe Argumente

¹³⁾ Siehe [1], S. 324, wo wir α durch $1/\varrho$, K_1 durch \hat{K}'_1 und \hat{K}_2 durch \hat{K}'_2 ersetzen.

¹⁴⁾ Ob ein vorgegebenes Treppenachteck außer (28) auch die Bedingung (38) erfüllt, kann man, wie in § 3 dargelegt wurde, an Bild 2 einfach feststellen, falls keine großen Anforderungen an die Genauigkeit gestellt werden.

existieren, wird man die Abbildung $z_1(s)$ folgendermaßen durchführen: Man überträgt durch die Umkehrung $s(z_1) = sn(k_1/z_1)$ ein orthogonales Kurvennetz der z_1 - auf die s -Ebene und bestimmt durch graphische Interpolation das Bild von $s(w^*)$ in der z_1 -Ebene. Das Entsprechende gilt für die Transformation $z_2(t)$. Gl.(25) liefert schließlich den gesuchten Punkt $z(w^*)$ im Achtecksbereich \mathcal{G} .

Ist das vorgegebene Polygon ausgeartet, so fallen, wie mit Hilfe von (29) und (18) leicht nachzuweisen ist, gewisse Verzweigungspunkte zusammen. Die Zwischenabbildungen vereinfachen sich hierbei. Gehen wir beim Fall c) (s. § 4) von der v -Ebene aus, so ergeben sich dieselben Transformationsgleichungen wie in dem damit identischen Fall γ) von ausgearteten Sechsecken.

§ 6. Praktische Anwendungen und Erweiterung der bisherigen Ergebnisse

1. Wir können die w -Halbebene \mathfrak{H} durch ein elliptisches Integral auf ein Rechteck \mathfrak{R} einer $\xi = \xi + i\eta$ -Ebene mit zu den Koordinatenachsen parallelen Seiten so abbilden, daß vier vorgeschriebene Punkte der reellen Achse in die Ecken von \mathfrak{R} übergehen. Da die Transformation $z(w)$ bekannt ist, besteht somit die Möglichkeit, den Achtecksbereich \mathcal{G} durch eine Funktion $\zeta(z) = \zeta(w(z))$ so auf \mathfrak{R} abzubilden, daß die Eckpunkte des Rechtecks vier beliebig vorgegebenen Randpunkten S_1, S_2, S_3, S_4 von \mathcal{G} entsprechen. Betrachten wir in der ξ -Ebene eine Parallelströmung der Geschwindigkeit 1 in Richtung der negativen ξ -Achse, so ist $\zeta(z)$ das komplexe Strömungspotential einer Strömung der z -Ebene¹⁵⁾. Den Potentiallinien $\xi = \text{const}$ entsprechen in \mathcal{G} wieder Potentiallinien, den Stromlinien $\eta = \text{const}$ wieder Stromlinien. Insbesondere sind die einzelnen den Seiten des Rechtecks \mathfrak{R} zugeordneten Randstücke von \mathcal{G} Potential- bzw. Stromlinien. Es dürfen daher je zwei Randstücke als Potential- bzw. Stromlinien vorgeschrieben werden. Fallen zwei oder zweimal je zwei der Randpunkte S_1, S_2, S_3, S_4 zusammen, so artet \mathfrak{R} in einen einseitig bzw. beiderseits unbegrenzten Parallelstreifen aus; sind drei dieser Punkte identisch, so entspricht dem Bereich \mathcal{G} ein Quadrant der ξ -Ebene.

Durch Spiegelungen erhalten wir das komplexe Strömungspotential in komplizierteren, z. T. mehrfach zusammenhängenden Bereichen. Die Abbildungen können auf die Strömungslehre, die Elektrotechnik, teilweise auch auf Probleme der Wärmeleitung und der Torsion angewandt werden. Freilich muß stets vorausgesetzt werden, daß das Problem als eben betrachtet werden kann.

2. In den Bildern 5 bis 8 ist eine Anzahl von Bereichen zusammengestellt, für die wir durch Spiegelung der Achtecke \mathcal{G} die Strom- und Potentiallinien ermitteln können. Selbstverständlich ist es in jedem Fall möglich, Strom- und Potentiallinien zu vertauschen. Da den vier Ecken von \mathfrak{R} nicht unbedingt Eckpunkte von \mathcal{G} entsprechen müssen, können im folgenden vielfach Teile von Symmetrielinien als Stromlinien vorgeschrieben werden, wie dies aus einigen Bildern (5d, 6e, 6f, 6g, 6i, 8c) zu ersehen ist. Die einzelnen Figuren sind leicht verständlich. Sie ergeben sich durch einfache, mehrmalige oder unendliche Spiegelung der jeweils ersten Figur (a), welche das besprochene Achteck bzw. eine seiner Ausartungen darstellt. Je nach der Zuordnung der Strom- und Potentiallinien lassen einige Bilder (5f, 5g, 6d, 6e, 6k, 6l, 7b, 7c, 8c) verschiedene Deutungen zu. So kann Bild 5f als symmetrische Umströmung der rechteckigen Kerne oder auch als Zirkulationsströmung um jeden einzelnen Kern mit abwechselndem Richtungssinn aufgefaßt werden. Eine Abbildung, die sich von 5e nur dadurch unterscheidet, daß die Einkerbungen einander gegenüberliegen, kann mit Hilfe von Treppensechsecken durchgeführt werden¹⁶⁾.

3. Wenden wir auf die z -Ebene die Exponentialfunktion an, so gelangen wir zu den in den Bildern 9 bis 12 angegebenen Bereichen.

Legen wir in Bild 5a A in den Nullpunkt und setzen $\overline{BC} + \overline{DE} = \pi$, so liefert die Transformation $Z = e^z$ einen Bereich von der Art des Bildes 9a und in Verbindung mit einer Spiegelung die Figur (b). Entsprechend bekommen wir durch $Z = e^{z/n}$ und mehrmalige Spiegelung einen innen und außen mit je n Kerben versehenen Kreisringbereich. Dieser ist für $n=2$ in (c) angegeben.

In Bild 6a sei $\overline{GH} + \overline{AB} = \pi$; B liege im Nullpunkt, A auf der reellen Achse. Dann liefert $Z = e^{-iz}$ die durch die Kurve des Bildes 10a begrenzte obere Halbebene. Durch Spiegelung ergibt sich die symmetrische Strömung bzw. Zirkulationsströmung um einen mit einer Auskerbung versehenen Kreis (b) und durch Inversion an diesem das Innere der Kurve (c). Der Wirbelpunkt dieser Strömung kann auf der Symmetrielinie beliebig angenommen werden. Aus (a) bekommen wir durch Ziehen der n . Wurzel den Winkelraum (d), durch Spiegelung die Zirkulationsströmung um die Zahnradkurve (e) — im Fall $n=2$ (f) auch die Umströmung in einer der beiden Symmetrierichtungen — und durch Inversion von (c) am inneren Kreis den endlichen Bereich (g) mit einem Wirbel im Mittelpunkt. Setzen wir (e) nach innen analytisch fort, so

¹⁵⁾ Vgl. [3], S. 63 ff.

¹⁶⁾ Vgl. [7], S. 129ff.

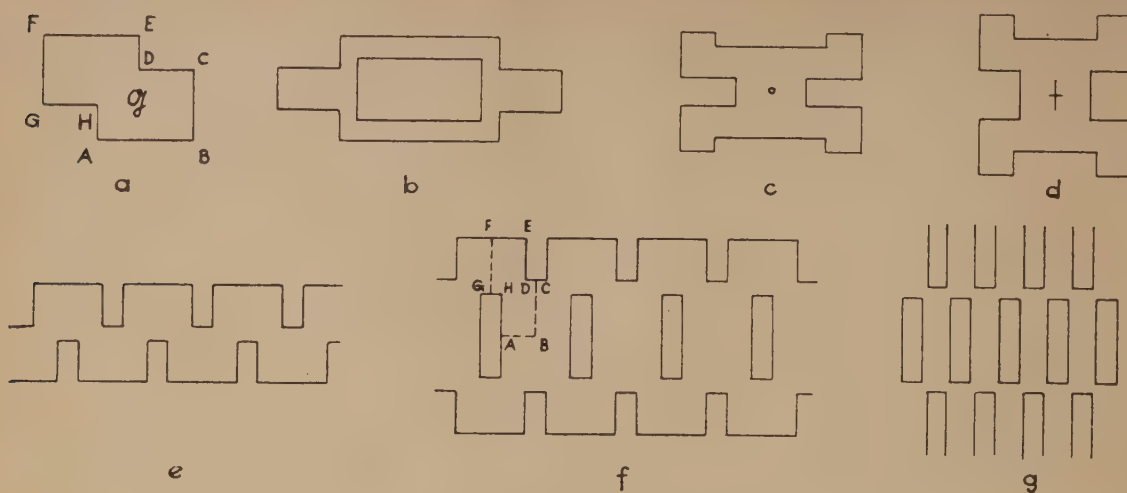


Bild 5

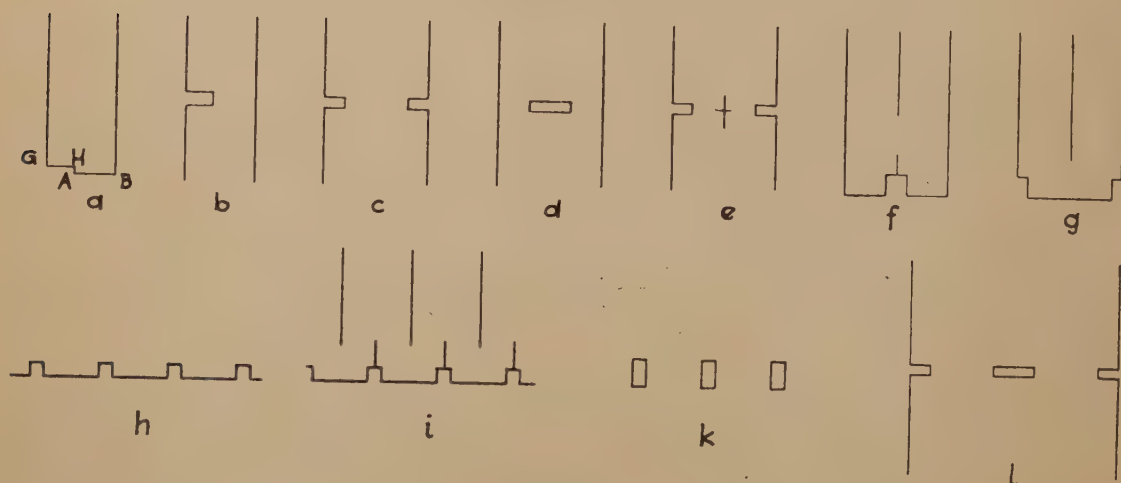


Bild 6

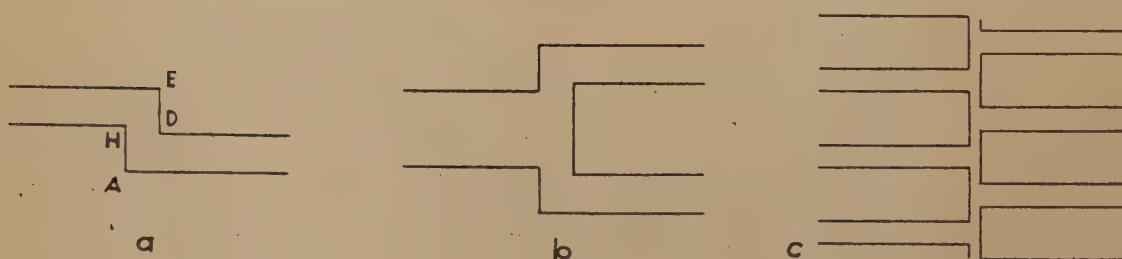


Bild 7

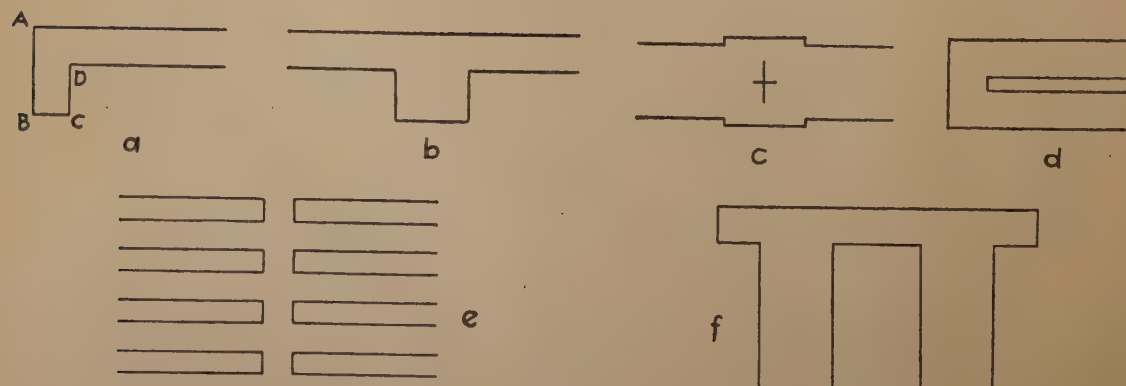


Bild 8

erhalten wir, falls wir in (a) den Kreisbogen AB als Potentiallinie, die übrigen Randstücke als Stromlinien betrachten, die Quellströmung (h) um symmetrisch angeordnete Hindernisse, speziell, indem wir (e) durch (b) ersetzen, um ein Hindernis (i). Ist dagegen in (a) außer AB auch der

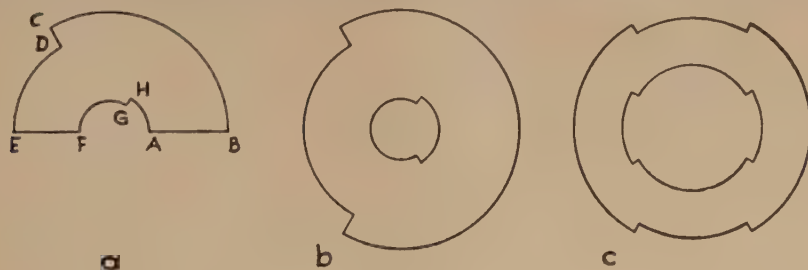


Bild 9

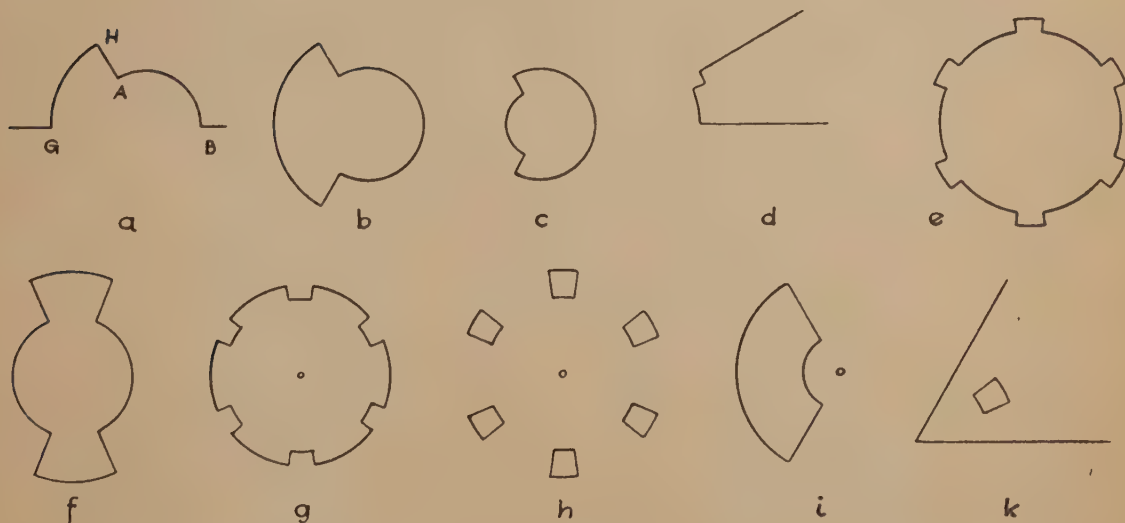


Bild 10

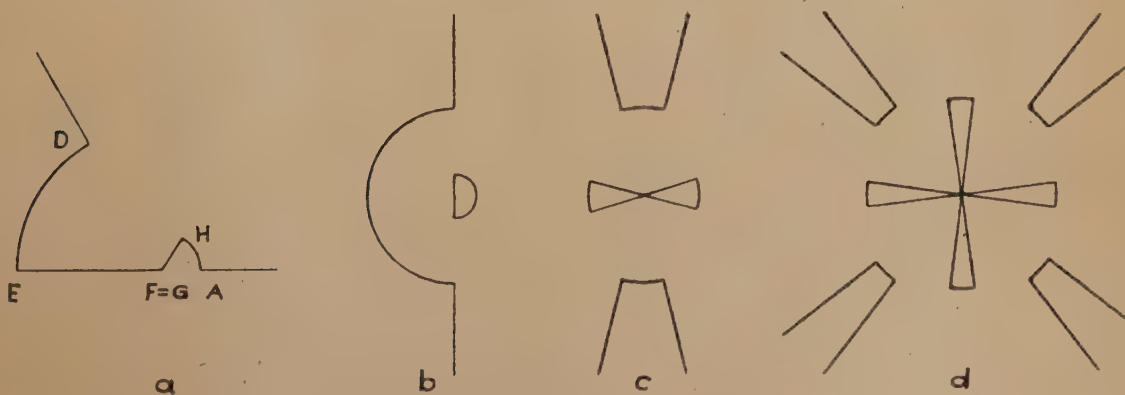


Bild 11

von G nach Unendlich führende Teil der reellen Achse eine Potentiallinie, so stellt (h) die Zirkulationsströmung mit abwechselndem Richtungssinn um jedes einzelne Hindernis dar (deren Anzahl in diesem Fall gerade sein muß). Entsprechend bekommen wir aus (d) die Umströmung eines Kreisringsektors in einem Winkelraum (k).

Bild 11a zeigt den Bereich, den wir durch Anwendung der Exponentialfunktion auf Bild 7a erhalten, wenn dort $\overline{BC} + \overline{DE} = \pi$ ist. Ist speziell $\overline{BC} = \overline{DE} = \frac{\pi}{2}$, so ergibt sich durch Spiegelung die Figur (b). Durch Radizieren und Spiegeln gelangen wir von (a) zu (c), (d) und ähnlichen Gebilden.

Ist in Bild 8a $\overline{AB} = \pi$ und liegt A im Nullpunkt, so liefert $Z = e^z$ den Bereich des Bildes 12a. Durch Radizieren und Spiegeln bekommen wir z.B. (b) und (c), aus (b) durch Inversion (d) und aus (c) durch analytische Fortsetzung am inneren Kreis (e). Ist speziell in Bild 8a $\overline{CD} = \frac{\pi}{2}$, so erhalten wir aus Bild 12a durch Spiegelung (f) und hieraus durch Inversion (g). Aus Bild 8f folgt mit $Z = e^{iz}$ die Strömung (h).

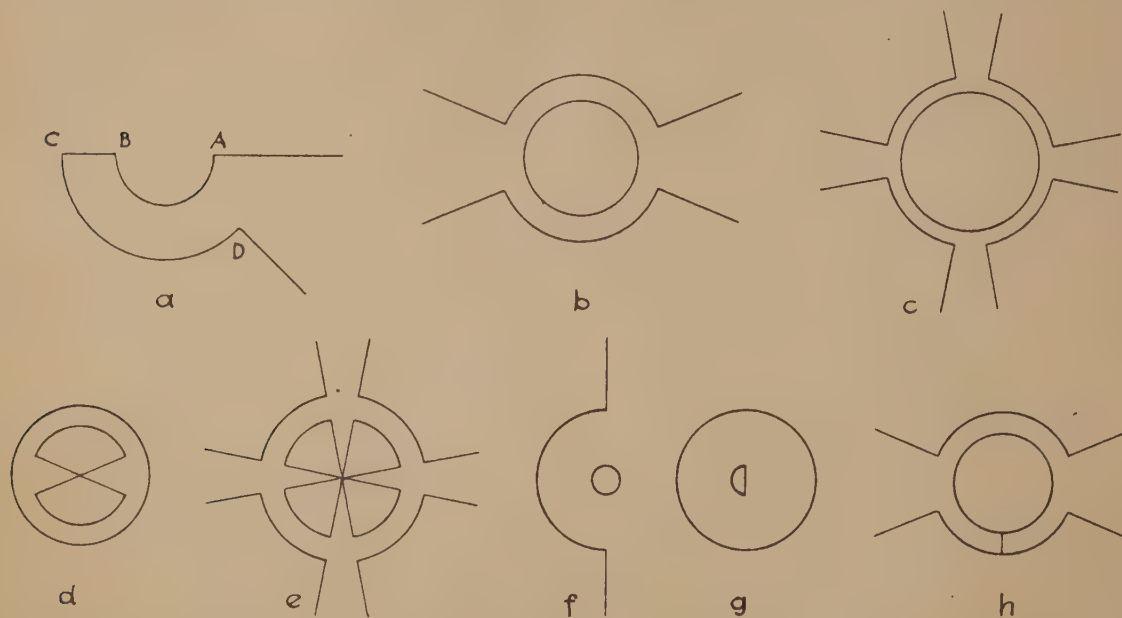


Bild 12

Auch auf die von Bergmann behandelten Treppensechsecke (Bild 13a) können wir die e -Funktion ausüben. Wir bekommen so die Figur (b), durch Spiegelung (c) und hieraus durch Inversion bzw. analytische Fortsetzung am äußeren Kreis bzw. am inneren Kreisbogen (d), (e) und (f). Ziehen wir aus (b) z.B. die 4. Wurzel, so erhalten wir nach mehrmaliger Spiegelung statt (c) das Bild (g). Entsprechend lassen sich die Figuren (d), (e) und (f) verallgemeinern.

4. Alle gezeigten Abbildungen sind (außer speziellen Symmetriebeziehungen) noch einer gewissen Einschränkung unterworfen; diese entspricht der Bedingung (38) für die Seitenlängen der Treppnachtecke.

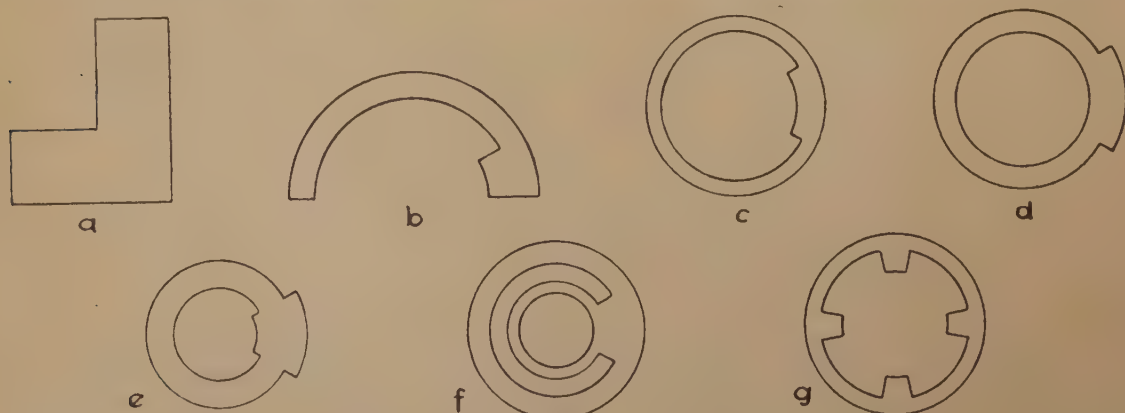


Bild 13

Unsere Zusammenstellung der konformen Abbildungen (Bild 5 bis 13), die mit Hilfe der ausführlich besprochenen Methode der Treppnachtecke (bzw. Treppensechsecke) durchgeführt werden können, läßt sich durch Anwendung anderer Funktionen, z.B. der trigonometrischen, der hyperbolischen, der linearen Funktionen oder der Potenzen, beliebig erweitern. Im allgemeinen ergeben sich hierbei ziemlich komplizierte Figuren.

Die Achtecksabbildung können wir noch etwas abändern: Lassen wir die Gl. (23a) und (23b) für die (reellen) Größen α_1 und α_2 fallen, so geht (26) über in einen Ausdruck von der Form

$$z(w) = C \int_1^w \frac{(\omega - \gamma)(\omega - \delta) d\omega}{\sqrt{\omega(\omega - 1)(\omega - c)(\omega - d)(\omega - e)(\omega - f)(\omega - h)}} \quad (42),$$

wo γ und δ von α_1 und α_2 abhängige reelle Konstanten sind.

Aus der Schwarz-Christoffelschen Formel folgt, daß das durch (42) gegebene Polygon der z -Ebene in den Ecken A, B, C, D, E, F, G, H jeweils den Innenwinkel $\pi/2$, in zwei weiteren Ecken den Winkel 2π besitzt. Wegen der

Symmetrie der Rechtecke der z_1 - und der z_2 -Ebene liegen diese beiden Eckpunkte symmetrisch zum Mittelpunkt des Polygons. Dieses ist also von der in Bild 14 angegebenen Gestalt.

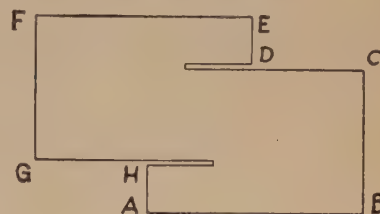


Bild 14

Literatur

- [1] S. Bergmann: Über die Berechnung des magnetischen Feldes in einem Einphasentransformator. Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 319–331.
- [2] K. Hayashi: Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderen Funktionen. Berlin 1930.
- [3] J. Heinhold: Theorie und Anwendung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen. München 1949.
- [4] Hurwitz-Courant: Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Berlin 1922.
- [5] M. Krause: Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig-Berlin 1912.
- [6] J. Lense: Vorlesungen über Höhere Mathematik. München 1948.
- [7] Rothe-Ollendorf-Pohlhausen: Funktionentheorie und ihre Anwendungen in der Technik. Berlin 1931.

Eingegangen am 14. März 1951.

KLEINE MITTEILUNGEN

Bemerkungen zur Konvergenz des Iterationsverfahrens bei linearen Gleichungssystemen¹⁾.

I. Einleitung und Programm

Das lineare Gleichungssystem, dessen Lösung gesucht ist, sei gegeben in der Form:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{c} \quad (1).$$

Hierbei bedeutet $\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ den gesuchten Lösungsvektor, $\mathfrak{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ einen vorgegebenen Vektor und \mathfrak{A}

eine vorgegebene quadratische Matrix mit n Zeilen und Spalten. Sämtliche Elemente von \mathfrak{c} und \mathfrak{A} seien reelle konstante Zahlen. Um die Lösbarkeit von (1) für beliebiges \mathfrak{c} zu sichern, wollen wir voraussetzen, daß der Rang von $\mathfrak{A} - \mathfrak{E}$ gleich n sei.

Die Iteration des Gleichungssystems werde in der folgenden Weise:

$$\mathfrak{x}_{m+1} = \mathfrak{A} \mathfrak{x}_m + \mathfrak{c} \quad (2)$$

durchgeführt. Bezeichnet man die gesuchte Lösung von (1) mit \mathfrak{x}_0 und führt die Abweichungen der Iterationen von dieser Lösung: $d\mathfrak{x}_m = \mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_0$ in (2) ein, so wird aus (2):

$$d\mathfrak{x}_{m+1} = \mathfrak{A} \cdot d\mathfrak{x}_m \quad (3).$$

Für die Konvergenz des Iterationsverfahrens ist dann bekanntlich notwendig und hinreichend, daß der Absolutbetrag sämtlicher Eigenwerte von \mathfrak{A} kleiner als 1 ist.

Die Anwendung dieses Konvergenzkriteriums setzt also die Bestimmung des absolut größten Eigenwertes von \mathfrak{A} , den wir λ_1 nennen wollen, voraus. Diese erfolgt bekanntlich aus der Berechnung aufeinanderfolgender Potenzen $\mathfrak{A}^p, \mathfrak{A}^{p+1}, \mathfrak{A}^{p+2}, \dots$ der Matrix \mathfrak{A} . Hierbei muß man, wenn außer dem Eigenwert mit größtem

Absolutbetrag noch Eigenwerte mit fast ebenso großen Absolutbeträgen auftreten, p ziemlich groß wählen, um λ_1 bestimmen und damit die Frage nach der Konvergenz des Iterationsverfahrens entscheiden zu können. Außerdem kommt erschwerend hinzu, daß sich die Berechnung von λ_1 verschieden gestaltet, je nachdem ob \mathfrak{A} einen reellen Eigenwert oder ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar mit größtem Absolutbetrag besitzt (ganz abgesehen von den Fällen, in denen das Auftreten mehrerer Eigenwerte bzw. Eigenwertpaare von gleichem größten Absolutbetrag die Berechnung von λ_1 noch weiter kompliziert).

Aus diesen Gründen kann die Bestimmung von λ_1 zur Untersuchung der Konvergenz des Iterationsverfahrens zuweilen ziemlich umständlich werden.

Außer der oben genannten notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Konvergenz des Iterationsverfahrens²⁾ sind in der Literatur zahlreiche einfache, aber nur hinreichende Konvergenzkriterien bekannt.

Im folgenden — in III — sollen einfache notwendige und hinreichende Bedingungen für spezielle, praktisch wichtige Arten der Konvergenz des Iterationsverfahrens aufgestellt werden. Durch diese speziellen Arten der Konvergenz werden, wie sich zeigen wird, alle überhaupt möglichen Fälle von Konvergenz erfaßt. Diese im folgenden aufzustellenden Konvergenzbedingungen werden die Kenntnis der Eigenwerte von \mathfrak{A} nicht voraussetzen.

Ehe wir zu diesen Bedingungen kommen, wollen wir in II einige anschaulich-geometrische Betrachtungen über den Konvergenzprozeß anstellen.

II. Anschauliche Darstellung des Konvergenzprozesses

Der Grad und die Art der Annäherung der Iterationen \mathfrak{x}_m für großes m an die Lösung \mathfrak{x}_0 hängt

¹⁾ Diese Arbeit ist entstanden im Anschluß an gemeinsame Untersuchungen von E. Krahn und dem Verfasser aus dem Sommer 1949.

²⁾ C. E. Berry: Ann. Math. Statistics 16 (1945), p. 398/400 stellt die mit der obigen Bedingung äquivalente notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung: $\lim_{p \rightarrow \infty} \mathfrak{A}^p = 0$ (0 = Nullmatrix) auf, die indessen praktisch zum Nachweis der Konvergenz bzw. Divergenz kaum verwendbar sein dürfte.

wesentlich von λ_1 ab. Wir setzen in II. stets $|\lambda_1| < 1$, d. h. Konvergenz des Iterationsverfahrens voraus. Die absolut genommen nächst größeren Eigenwerte von \mathfrak{A} bezeichnen wir mit λ_2, λ_3 , usw. Mehrfache Eigenwerte werden ihrer Vielfachheit gemäß gezählt; bei mehreren verschiedenen Eigenwerten mit gleichem Absolutbetrag erfolgt die Numerierung im Sinne wachsender Winkelargumente.

Im folgenden beschränken wir uns auf einige wenige häufig vorkommende Möglichkeiten für λ_1 , da diese bereits zur Erläuterung unserer Betrachtungen in III genügen werden.

1. Fall: λ_1 sei ein einfacher reeller Eigenwert von \mathfrak{A} , und es sei $|\lambda_1| > |\lambda_2|$.

Dann gilt bekanntlich für hinreichend großes m (in asymptotischem Sinne):

$$d\tilde{x}_{m+1} = \lambda_1 \cdot d\tilde{x}_m \dots \dots \dots (4)$$

oder wegen (3):

$$(\mathfrak{A} - \lambda_1 \mathfrak{E}) d\tilde{x}_m = 0 \dots \dots \dots (5).$$

Aus 4 ist ersichtlich, daß für hinreichend großes m die Abweichung $d\tilde{x}_m$ von der Lösung \tilde{x}_0 sich mit jedem Schritt auf das $|\lambda_1|$ -fache verkleinert ($|\lambda_1| < 1$). Aus (4) folgt weiter, daß für hinreichend großes m die Annäherung an die Lösung mehr und mehr auf einer Geraden erfolgt, und zwar für $\lambda_1 > 0$ von einer Seite her, für $\lambda_1 < 0$ oszillierend. Aus (5) folgt, daß diese Gerade die Richtung des zu λ_1 gehörigen Eigenvektors η_1 von \mathfrak{A} hat, also von dem Ausgangsvektor des Iterationsverfahrens völlig unabhängig ist.

Uns interessiert für das folgende lediglich, daß von einem hinreichend großen m an in diesem Falle die Konvergenz stets monoton erfolgt, d. h. daß für hinreichend großes m stets $|d\tilde{x}_{m+1}| < |d\tilde{x}_m|$ ist.

2. Fall: λ_1 und $\lambda_2 = -\lambda_1$ seien einfache reelle Eigenwerte von \mathfrak{A} , und es sei $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$.

Dann gilt entsprechend (in asymptotischem Sinne):

$$d\tilde{x}_{m+2} = \lambda_1^2 \cdot d\tilde{x}_m \dots \dots \dots (6)$$

oder wegen (3):

$$(\mathfrak{A}^2 - \lambda_1^2 \mathfrak{E}) d\tilde{x}_m = 0 \dots \dots \dots (7).$$

Aus (6) und (7) folgt: Da der Rang von $\mathfrak{A}^2 - \lambda_1^2 \mathfrak{E}$ jetzt $n-2$ ist, hat \mathfrak{A}^2 zwei zu den Eigenwerten $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ gehörige linear unabhängige Eigenvektoren η_1 und η_2 . Die Annäherungen an die Lösung \tilde{x}_0 erfolgen für hinreichend großes m mehr und mehr auf zwei Geraden, die in der durch η_1 und η_2 aufgespannten Ebene liegen. Und zwar wechseln die Näherungswerte mit jedem Schritt die Gerade, so daß $d\tilde{x}_m, d\tilde{x}_{m+2}, d\tilde{x}_{m+4}, \dots$ auf einer und $d\tilde{x}_{m+1}, d\tilde{x}_{m+3}, d\tilde{x}_{m+5}, \dots$ auf der anderen Geraden liegen. Die Lage dieser Geraden in der durch die beiden Eigenvektoren bestimmten Ebene hängt von dem Ausgangsvektor des Iterationsverfahrens ab. Beim Übergang von einer Näherung $d\tilde{x}_m$ zur übernächsten $d\tilde{x}_{m+2}$, die auf der gleichen Geraden wie $d\tilde{x}_m$ liegt, bzw. von $d\tilde{x}_{m+1}$ zu $d\tilde{x}_{m+3}$ nimmt die Abweichung von der Lösung auf den $\lambda_1^2 = \lambda_2^2$ -fachen Teil ab.

Dagegen gestatten die Gl. (6) und (7) keine Aussage über die Änderung der Abweichung beim Übergang von $d\tilde{x}_m$ zu $d\tilde{x}_{m+1}$ bzw. von $d\tilde{x}_{m+1}$ zu $d\tilde{x}_{m+2}$, d. h. beim Überwechseln von einer Geraden auf die andere. Hierbei kann es nun durchaus passieren, daß trotz konvergentem Iterationsverfahren stets z. B. $|d\tilde{x}_{m+1}| > |d\tilde{x}_m|$, $|d\tilde{x}_{m+3}| > |d\tilde{x}_{m+2}|$ usw. ist³⁾.

³⁾ Beispiel: $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ mit den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$.

Geht man z. B. von $d\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus, so liefert das Iterationsverfahren:

$d\tilde{x}_1$	$d\tilde{x}_2$	$d\tilde{x}_3$	$d\tilde{x}_4$...
1	0,3125	0,2500	0,078125
1	2,7500	0,2500	0,687500

Offensichtlich ist $|d\tilde{x}_2| > |d\tilde{x}_1|$, $|d\tilde{x}_4| > |d\tilde{x}_3|$ usw.

Natürlich muß dann $|d\tilde{x}_{m+2}| < |d\tilde{x}_{m+1}|$, $|d\tilde{x}_{m+4}| < |d\tilde{x}_{m+3}|$ usw. sein.

Für uns ist lediglich wesentlich, daß in diesem Falle die Konvergenz bei noch so großem m nicht notwendig monoton zu sein braucht.

3. Fall: $\lambda_1 = a + bi$ und $\lambda_2 = a - bi$ sei ein einfaches komplexes Eigenwertpaar von \mathfrak{A} , und es sei $|\lambda_1| = |\lambda_2| > |\lambda_3|$. Dann gilt für drei aufeinanderfolgende Abweichungen $d\tilde{x}_m, d\tilde{x}_{m+1}, d\tilde{x}_{m+2}$ für hinreichend großes m bekanntlich (in asymptotischem Sinne) die Beziehung:

$$d\tilde{x}_{m+2} = -(a^2 + b^2)d\tilde{x}_m + 2a \cdot d\tilde{x}_{m+1} \quad (8).$$

Aus ihr folgt, daß von hinreichend großem m an alle Näherungen sich mehr und mehr einer festen Ebene durch den Lösungspunkt \tilde{x}_0 nähern. Diese Ebene ergibt sich aus den beiden linear unabhängigen Lösungsvektoren η_1 und η_2 von

$$(\mathfrak{A} - \lambda_1 \mathfrak{E})(\mathfrak{A} - \lambda_2 \mathfrak{E})\eta = 0 \dots \dots (9),$$

wie man durch Umformung von (8) unter Benutzung von (3) erkennt.

Verbindet man die aufeinanderfolgenden Näherungen $\tilde{x}_m, \tilde{x}_{m+1}, \tilde{x}_{m+2} \dots$ geradlinig miteinander, so erhält man ein Polygon, das sich spiralartig der Lösung \tilde{x}_0 nähert, wobei sich die einzelnen Polygonstrecken immer mehr der durch η_1 und η_2 ausgespannten Ebene nähern.

Um zu untersuchen, ob die Konvergenz in diesem Falle monoton sein muß, bilden wir nach (8):

$$d\tilde{x}_{m+3} = -(a^2 + b^2)d\tilde{x}_{m+1} + 2a \cdot d\tilde{x}_{m+2},$$

$$d\tilde{x}_{m+3} = -2a(a^2 + b^2)d\tilde{x}_m + (3a^2 - b^2)d\tilde{x}_{m+1}.$$

Setzt man abkürzend:

$$-(a^2 + b^2)d\tilde{x}_m = \tilde{z}_m, \quad 2a d\tilde{x}_{m+1} = \tilde{z}_{m+1},$$

so wird:

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{x}_{m+2} &= \tilde{z}_m + \tilde{z}_{m+1}, \\ d\tilde{x}_{m+3} &= 2a \cdot \tilde{z}_m + \frac{3a^2 - b^2}{2a} \cdot \tilde{z}_{m+1} \end{aligned} \right\} \cdot (10).$$

Aus (10) ist ersichtlich, was uns hier allein interessiert, daß auch in diesem Falle die Konvergenz des Iterationsverfahrens bei beliebig großem m durchaus nicht monoton zu sein braucht⁴⁾.

III. Spezielle Arten von Konvergenz

Die Ausführungen in II haben ergeben, daß nicht jede Konvergenz monoton zu sein braucht. Von praktischem Interesse ist nun offenbar die Frage: Wie kann man aus der Matrix \mathfrak{A} schließen, ob für sie das Iterationsverfahren monoton konvergiert oder nicht?

Wir wollen uns hier indessen nicht auf die monotone Konvergenz beschränken, sondern unseren Untersuchungen eine etwas allgemeinere Art der Konvergenz zugrunde legen. Und zwar wollen wir fordern, daß wir bei der Iteration (2), von einem beliebigen Vektor $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 + d\tilde{x}_1$ ausgehend, erst nach p Iterationsschritten immer notwendig zu einem Vektor $\tilde{x}_{p+1} = \tilde{x}_0 + d\tilde{x}_{p+1}$ kommen, der von der Lösung \tilde{x}_0 weniger abweicht als \tilde{x}_1 , d. h. für den $|d\tilde{x}_{p+1}| < |d\tilde{x}_1|$ ist. Ist diese Forderung erfüllt, so wollen wir sagen, das Iterationsverfahren sei für die Matrix \mathfrak{A} konvergent nach p -ter Art. Für $p = 1$ (Konvergenz erster

⁴⁾ Vgl. z. B. L. A. Pipes: Journal of the Franklin Institute 225 (1938), p. 437/454.

⁵⁾ Eine grobe Abschätzung liefert aus (10), daß die Konvergenz sicherlich nicht monoton ist, wenn $-a^2 + b^2 < 1$ vorausgesetzt — $|a| > \frac{3}{2}$ und $b^2 < 3a^2 - 2|a|$ ist. Diese Bedingungen sind erfüllt z. B. für $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$.

Art) erhält man hieraus den Fall der durchweg monotonen Konvergenz.

Für die Konvergenz p -ter Art des Iterationsverfahrens läßt sich nun leicht ein notwendiges und hinreichendes Kriterium angeben. Aus $|d\bar{x}_{p+1}| < |d\bar{x}_1|$ oder $d\bar{x}'_{p+1} \cdot d\bar{x}_{p+1} < d\bar{x}'_1 \cdot d\bar{x}_1$ folgt nämlich unter Verwendung von (3): $d\bar{x}'_1 \cdot (\mathcal{M}')' \cdot \mathcal{M} \cdot d\bar{x}_1 < d\bar{x}'_1 \cdot d\bar{x}_1$ oder:

$$d\bar{x}'_1 (\mathcal{E} - (\mathcal{M}')' \mathcal{M}) d\bar{x}_1 > 0 \quad (11)$$

Die linke Seite von (11) stellt eine quadratische Form in den Komponenten von $d\bar{x}_1$ dar. Diese soll nach (11) positiv definit sein. Dazu ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß die Abschnittsdeterminanten von $\mathcal{E} - (\mathcal{M}')' \mathcal{M}$ sämtlich positiv sind.

Notwendig und hinreichend für Konvergenz p -ter Art ist also, daß sämtliche Abschnittsdeterminanten von $\mathcal{E} - (\mathcal{M}')' \mathcal{M}$ positiv sind. Speziell liegt durchweg monotone Konvergenz des Iterationsverfahrens dann und nur dann vor, wenn alle Abschnittsdeterminanten von $\mathcal{E} - \mathcal{M}' \mathcal{M}$ positiv sind.

Daß Konvergenz p -ter Art für jede natürliche Zahl p wirklich auftreten kann, sieht man an dem Beispiel:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2^k & 0 \end{pmatrix} \quad (k \text{ ganze Zahl } \geq -1).$$

Hier wird

$$\mathcal{E} - (\mathcal{M}')' \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 - \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{2p} + 2^{2k+2-2p} \right\} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die für Konvergenz p -ter Art notwendige und hinreichende Bedingung ergibt hier:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2p} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2p-2(k+1)} < 1.$$

Sie ist offenbar nur erfüllt für $2p - 2(k+1) \geq 1$ oder $p \geq k + \frac{3}{2}$, d. h. für die Matrix $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 2^k & 0 \end{pmatrix}$

ist das Iterationsverfahren nach $p = k + 2$ -ter Art konvergent. Läßt man k die Zahlenreihe $-1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots$ durchlaufen, so erhält man in unserem Beispiel also Konvergenz 1ter, 2ter, 3ter, 4ter, 5ter, 6ter, ... Art.

Es soll jetzt noch gezeigt werden, daß die Konvergenz p -ter Art ($p = 1, 2, 3, \dots$) sämtliche überhaupt möglichen Fälle der Konvergenz des Iterationsverfahrens umfaßt, d. h. daß jede Konvergenz schlechthin des Iterationsverfahrens eine Konvergenz p -ter Art für ein ganz bestimmtes p in dem von uns definierten Sinne ist ⁷⁾.

Aus der notwendigen und hinreichenden Konvergenzbedingung $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{M}^n = 0$ des Iterationsverfahrens

folgt nämlich: Bei Konvergenz des Iterationsverfahrens kann man eine hinreichend große ganze positive Zahl M stets so angeben, daß jedes Element von \mathcal{M}^M

dem Betrage nach $< \sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{n}}$ wird, wobei ε eine beliebig kleine positive Zahl und n die Zahl der Zeilen oder Spalten von \mathcal{M} bedeutet. Dann aber ist jedes Element von $(\mathcal{M}')' \cdot \mathcal{M}^M$ dem Betrage nach kleiner als ε . Es überwiegen dann in der Matrix $\mathcal{E} - (\mathcal{M}')' \mathcal{M}^M$ die Einsen der Hauptdiagonale von \mathcal{E} , so daß sich die Abschnittsdeterminanten von $\mathcal{E} - (\mathcal{M}')' \mathcal{M}^M$ um so weniger von 1 unterscheiden werden, je kleiner ε ist. Für genügend großes M sind also, Konvergenz des Iterationsverfahrens vorausgesetzt, sicher alle Ab-

schnittsdeterminanten von $\mathcal{E} - (\mathcal{M}')' \mathcal{M}^M$ positiv. Ist die kleinste Zahl M , für die das zutrifft, $M = M_0$, so liegt offenbar Konvergenz $p = M_0$ -ter Art vor.

Unsere Erkenntnis, daß jede Konvergenz des Iterationsverfahrens eine Konvergenz p -ter Art für ein ganz bestimmtes p darstellt, ermöglicht es uns nun sofort, jedes konvergente Iterationsverfahren auf ein solches, das nach erster Art konvergiert, zurückzuführen.

Hat man nämlich erkannt, daß das durch (2) erklärte konvergente Iterationsverfahren nach p -ter Art konvergiert ⁸⁾, so konvergiert offenbar das auf

$$\bar{x} = \mathcal{M}^p \bar{x} + \bar{b} \quad (12)$$

mit $\bar{b} = \mathcal{M}^{p-1} \bar{c} + \mathcal{M}^{p-2} \bar{c} + \dots + \mathcal{M} \bar{c} + \bar{c}$ angewandte Iterationsverfahren nach erster Art.

Wir haben in unseren obigen Ausführungen die Forderung der monotonen Konvergenz (jeder Iterationsschritt führt näher an die Lösung heran als der vorhergehende) durch die Einführung der Konvergenz p -ter Art abgeschwächt. Man kann nun natürlich auch umgekehrt die Forderung der monotonen Konvergenz verschärfen, indem man verlangt, daß die Abweichung von der Lösung \bar{x}_0 nach jedem Schritt einen

kleinen Bruchteil $\frac{1}{N}$ der Abweichung vor diesem Schritt nicht übersteigen darf. Die Bedingung dafür lautet offenbar: $d\bar{x}'_{m+1} \cdot d\bar{x}_{m+1} < \frac{1}{N^2} \cdot d\bar{x}'_m \cdot d\bar{x}_m$ oder bei Benutzung von (3):

$$d\bar{x}'_m \left(\frac{1}{N^2} \mathcal{E} - \mathcal{M}' \mathcal{M} \right) \cdot d\bar{x}_m > 0 \quad (13).$$

Soll also nach jedem Iterationsschritt die Abweichung von der Lösung \bar{x}_0 stets kleiner als $\frac{1}{N}$ -tel der Abweichung vor diesem Schritt sein, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß sämtliche Abschnittsdeterminanten der Matrix $\frac{1}{N^2} \mathcal{E} - \mathcal{M}' \mathcal{M}$ positiv sind.

Dies kann man — Konvergenz des Iterationsverfahrens vorausgesetzt — stets erreichen, wenn man die Matrix \mathcal{M} durch die Matrix \mathcal{M}^M für genügend großes (ganzes positives) M ersetzt, d. h. an Stelle des Gleichungssystems $\bar{x} = \mathcal{M} \bar{x} + \bar{c}$ das System $\bar{x} = \mathcal{M}^M \bar{x} + \bar{b}$ mit $\bar{b} = \mathcal{M}^{M-1} \bar{c} + \mathcal{M}^{M-2} \bar{c} + \dots + \mathcal{M} \bar{c} + \bar{c}$ iteriert.

Abschließend sei noch bemerkt, daß die in III angestellten Betrachtungen über die Konvergenz p -ter Art des Iterationsverfahrens und das dafür aufgestellte Konvergenzkriterium nicht auf lineare Gleichungssysteme beschränkt sind, sondern sich auf beliebige Gleichungssysteme: $x_\nu = a_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$) übertragen lassen, bei denen die Funktionen $a_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in der Umgebung der gesuchten Lösung mindestens einmal stetig differenzierbare Funktionen von x_1, x_2, \dots, x_n sind. Die Matrix \mathcal{M} in (3) hat man lediglich durch die Funktional-

$$\text{matrix: } \tilde{\mathcal{M}}_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{im Lösungspunkt } \bar{x}_0$$

zu ersetzen. Liegt der Näherungswert \bar{x}_1 genügend nahe bei \bar{x}_0 , so wird man $\tilde{\mathcal{M}}_0$ durch $\tilde{\mathcal{M}}_1$, d. h. die im Punkte \bar{x}_1 gebildete Funktionalmatrix ersetzen können. Man hat dann das obige Abschnittsdeterminanten-Kriterium auf die Matrizen $\mathcal{E} - (\tilde{\mathcal{M}}_1^p)' \tilde{\mathcal{M}}_1^p$ anzuwenden, um die spezielle Art der Konvergenz zu erkennen.

Frankfurt/Main.

E. Fehlberg.

⁶⁾ Der Strich soll die transponierte Matrix bzw. den transponierten Vektor bedeuten.

⁷⁾ Hierauf hat mich E. Krahn aufmerksam gemacht. Von ihm stammt auch ein für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf anderem Wege geführter erster Beweis dieser Tatsache.

⁸⁾ Die Frage, wie man Konvergenz des Iterationsverfahrens überhaupt erreichen kann, lassen wir hier beiseite, da sie in der Literatur zur Genüge behandelt ist (vgl. z. B. die Beschreibung des Runge'schen Verfahrens in Runge-König: Numerisches Rechnen. Berlin 1924. p. 187).

Zur genäherten Auflösung algebraischer Gleichungen¹⁾.

1. Eine Näherungsmethode zur analytischen Fortsetzung

Wendet man das Newtonsche Verfahren oder die regula falsi zur Bestimmung komplexer Wurzeln algebraischer Gleichungen an, bereitet das Auffinden einer ersten Näherung Schwierigkeiten. Im folgenden wird eine Methode beschrieben, die diese graphisch mittels genäherter analytischer Fortsetzung findet.

Durch $w=f(z)$ werde eine konforme Abbildung der z -Ebene auf die w -Ebene vermittelt. Bekannt seien die Bildpunkte der Punkte $z_0 m = r \cdot e^{i(\varphi_0 + m\varphi)}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, 0 < \varphi < \pi$). Gesucht sind die Bildpunkte der Punkte $z_n m = r \cdot e^{i(\varphi_0 + m\varphi) + n\varphi}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man $r=1, \varphi_0=0$ und $f(1)=1$ voraussetzen. Es handelt sich also darum, das Bild eines Quadratnetzes der ζ -Ebene ($\zeta = \log z$) zu finden. Es werden die Bezeichnungen $a = f(e^{i\varphi})$, $b = f(e^{-i\varphi})$, $c = f(e^\varphi)$ und $d = f(e^{-\varphi})$ eingeführt. Die erste Näherung c_1 bzw. d_1 für c bzw. d erhält man durch lineare Fortsetzung mit Benutzung von a und b . Aus Bild 1 ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{e^\varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi}, & c_1 &= \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2i} \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{\cos \varphi - e^{-\varphi}}{\sin \varphi}, & d_1 &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2i} \cdot \operatorname{tg} \beta \end{aligned} \right\} (1).$$

Die Konstruktion von c_1 und d_1 kann man sich erleichtern, wenn man ein aus durchsichtigem Koordinatenpapier geschnittenes Viereck benutzt, das aus zwei gleichschenkligen Dreiecken mit den Basiswinkeln α und β zusammengesetzt ist.

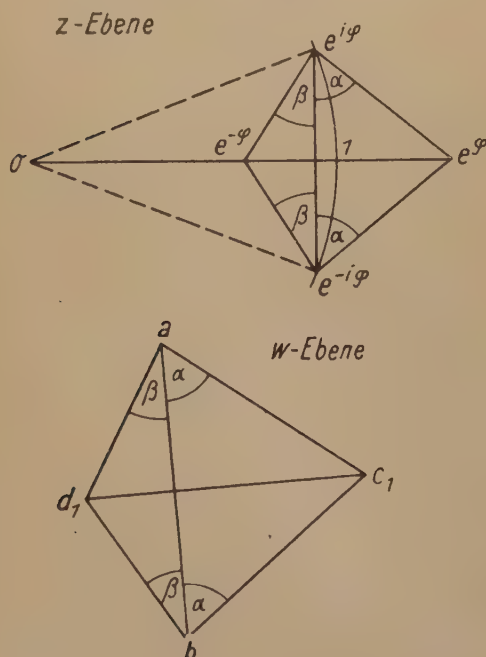


Bild 1

Die zweiten Näherungen c_2 und d_2 erhält man durch Fortsetzung eines Polynoms $w = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2$,

¹⁾ Diese Arbeit stellt einen Teiler der von der Technischen Hochschule Dresden 1951 genehmigten Diplomarbeit des Verfassers dar.

das mit $f(z)$ in den Punkten $z = e^{i\varphi}$, $z = 1$ und $z = e^{-i\varphi}$ übereinstimmt. Führt man $A = \frac{a+b}{2} - 1$ und

$B = \frac{a-b}{2i}$ ein, erhält man

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A \cdot \cos \varphi + B \cdot \sin \varphi}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \\ \alpha_2 &= - \frac{A \cdot \cos \frac{\varphi}{2} + B \cdot \sin \frac{\varphi}{2}}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}} \end{aligned} \right\} (2).$$

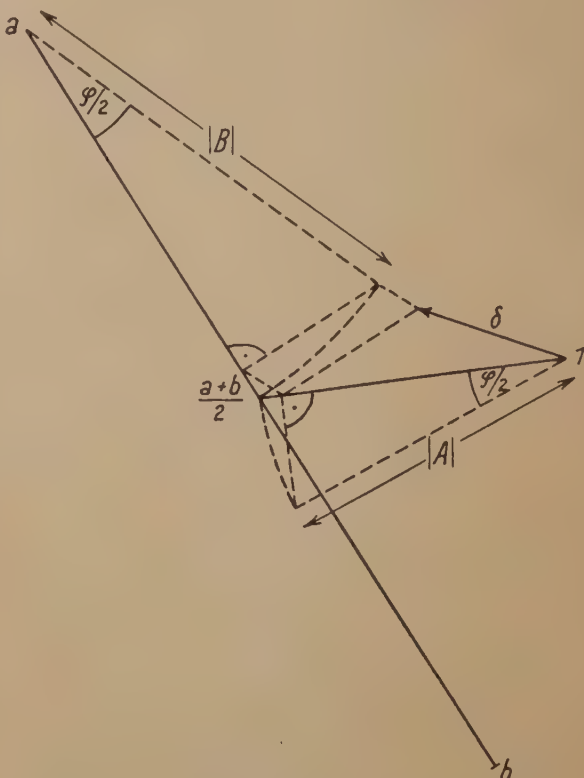


Bild 2

Wegen $f(1)=1$ ist $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$, also

$$c_2 - 1 = \alpha_1 (e^\varphi - 1) + \alpha_2 (e^{2\varphi} - 1).$$

Beachtet man noch

$$c_1 - 1 = A + B \cdot \frac{e^\varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi},$$

erhält man

$$c_2 - c_1 = -g(\varphi) \cdot \delta(\varphi) \dots (3),$$

wobei $g(\varphi) = \frac{1 + e^{2\varphi} - 2 \cos \varphi \cdot e^\varphi}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}$ und

$\delta(\varphi) = A \cos \frac{\varphi}{2} + B \sin \frac{\varphi}{2}$ ist. Die Konstruktion von δ ist in Bild 2 durchgeführt. Man wird dabei in den meisten Fällen $A \cos \frac{\varphi}{2}$ mit genügender Genauigkeit durch A ersetzen können. Entsprechend ist

$$d_2 - d_1 = -g(-\varphi) \cdot \delta(\varphi).$$

Da

$$\frac{c_2 - c_1}{d_2 - d_1} = \frac{g(\varphi)}{g(-\varphi)} = e^{2\varphi} \dots (4)$$

unabhängig von $f(z)$ ist, kann man sich die Konstruktion von δ ersparen, wenn d bekannt ist. Ersetzt man nämlich in (4) d_2 durch d , ergibt sich

$$c^{(2)} = c_1 + e^{2\varphi}(d - d_1) \dots (5a)$$

als Näherung für c . Ihr Fehler ist ebenfalls klein von dritter Ordnung. Entsprechend ist

$$d^{(2)} = d_1 + e^{-2\varphi}(c - c_1) \dots (5b).$$

Die Fortsetzung wird demnach in der Weise durchgeführt, daß man ausgehend von den Bildpunkten der Punkte $z_{0m} = r \cdot e^{i(\varphi_0 + m\varphi)}$ nach (3) die Bildpunkte der Punkte $z_{1m} = r \cdot e^{i(\varphi_0 + m\varphi) + \varphi}$ und daraus nach (5a) die Bildpunkte der Punkte $z_{2m} = r \cdot e^{i(\varphi_0 + m\varphi) + 2\varphi}$ konstruiert. So fährt man fort. Entsprechend geht man bei der Konstruktion der Bildpunkte der Punkte $z_{-n,m} = r \cdot e^{i(\varphi_0 + m\varphi) - n\varphi}$ vor. In der folgenden Tabelle sind α , β , $g(\varphi)$, $g(-\varphi)$, $e^{2\varphi}$ und $e^{-2\varphi}$ für einige Werte von φ zusammengestellt. Bei Berechnung der Winkel α und β kann man die aus (1) sich ergebende Beziehung $\alpha - \beta = \varphi$ benutzen.

φ	α	β	$g(\varphi)$	$g(-\varphi)$	$e^{2\varphi}$	$e^{-2\varphi}$
5°	47° 28'	42° 28'	2,19	1,84	1,19	0,84
10°	49° 51'	39° 51'	2,40	1,69	1,42	0,71
15°	52° 10'	37° 10'	2,64	1,56	1,69	0,59
20°	54° 25'	34° 25'	2,91	1,45	2,01	0,50
25°	56° 35'	31° 35'	3,22	1,35	2,39	0,42
30°	58° 42'	28° 42'	3,58	1,26	2,85	0,35
22½°	55° 31'	33° 1'	3,06	1,39	2,19	0,46
45°	64° 33'	19° 33'	5,01	1,04	4,81	0,21

2. Anwendung zur Lösung algebraischer Gleichungen

Will man jetzt die beschriebene Methode zur Lösung einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten verwenden, wird man $z_0 = r \cdot e^{i\varphi_0}$, also den Ausgangspunkt für die Fortsetzung, nicht beliebig wählen. Es soll vorausgesetzt werden, daß die Gleichung keine reellen Wurzeln hat. Schreibt man sie in der Form

$$f(z) = z^n + \sum_{m=0}^{n-1} a_m z^m = 0 \quad (n \text{ gerade}) \quad (6),$$

so hat $f(z)$ mindestens ein reelles positives Minimum mit der Abszisse ξ . Sei also $f(\xi) = \eta$ und $f'(\xi) = 0$ (ξ reell, η positiv). Nähert man jetzt $f(z)$ durch

$$h(z) = \eta + \frac{1}{2} f''(\xi) \cdot (z - \xi)^2 \dots (7)$$

an, so sind die Nullstellen von $h(z)$ grobe Näherungen für die Nullstellen von $f(z)$. Man wählt also

$z_0 = \xi + i\sqrt{2\eta/f''(\xi)}$ und bestimmt $f(z_0)$ entweder rechnerisch mit Hilfe des erweiterten Horner'schen Schemas²⁾ oder graphisch durch Vektoraddition. Die Konstruktion durch Vektoraddition läßt sich für die Bildpunkte eines Kreises $|z| = \text{const}$ leicht mit Hilfe fest eingestellter Zirkel durchführen. Wenn $|f(z_0)|$ schon genügend klein ist, kann man sofort mit dem Newton'schen Verfahren oder der regula falsi weiterrechnen. Andernfalls setzt man $f(z)$ unter Verwendung von Bildpunkten des Kreises $|z| = |z_0|$ wie oben beschrieben in Richtung auf den Nullpunkt fort. In den meisten Fällen werden ein oder zwei Schritte genügen, um eine brauchbare Ausgangsnäherung für die weitere Rechnung zu finden, wenn man die Schrittweite φ nicht zu klein wählt. Manchmal kann man sich diese Fortsetzung ganz ersparen, wenn man be-

achtet, daß man sich in der Umgebung eines stationären Punktes von $f(z)$ befindet. Das Bild eines $z = \xi$ einschließenden Kreises K der z -Ebene hat dann eine $w = \eta$ einschließende Schlinge. In Bild 3 ist der Fall gezeichnet, daß $f'(z)$ in $z = \xi$ eine einfache Nullstelle hat. Die Bildkurven der Kreise K_1 und K_2 sind mit K'_1 und K'_2 bezeichnet. Aus der Lage von $f(z_0)$ zum Punkt $w = 0$ kann man mit Hilfe der in Bild 3 dargestellten typischen Gestalt der Schlinge leicht eine bessere Näherung z_1 schätzen.

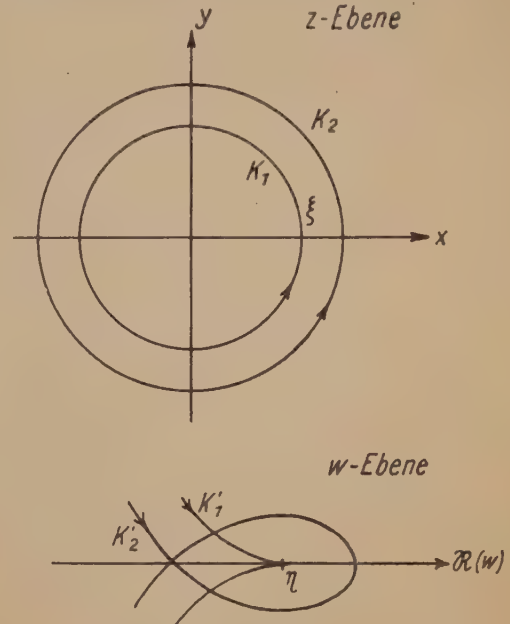


Bild 3

Hat die vorgelegte Gleichung komplexe Koeffizienten, kann man nicht in der beschriebenen Weise verfahren. Es lassen sich aber auch hier leicht obere und untere Schranken für die Absolutbeträge der Wurzeln ergeben. Ist

$$f(z) = \sum_{m=0}^n a_m z^m = 0$$

die Gleichung, so kann $z = t$ keine Wurzel sein, wenn

$$|a_n t^n| > \left| \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^m \right|$$

gilt. Wegen

$$\left| \sum_{m=0}^{n-1} a_m t^m \right| \leq \sum_{m=0}^{n-1} |a_m t^m| \leq M \sum_{m=0}^{n-1} |a_m|$$

mit

$$M = \begin{cases} |t|^{n-1} & \text{für } |t| \geq 1 \\ 1 & \text{für } |t| < 1 \end{cases}$$

ist das sicher erfüllt, wenn

$$\frac{|t^n|}{M} > \frac{\sum_{m=0}^{n-1} |a_m|}{|a_n|} = C$$

ist. C bzw. $\sqrt[n]{C}$ ist also die gesuchte obere Schranke. Eine untere Schranke ist das Reziproke einer oberen Schranke für die Wurzeln der Gleichung

$$\sum_{m=0}^n a_{n-m} z^m = 0,$$

²⁾ L. Collatz, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 235—236.

deren Wurzeln ja die Reziproken der Wurzeln der ursprünglichen Gleichung sind. Mit

$$D = \frac{|a_0|}{\sum_{m=1}^n |a_m|}$$

ist also entweder D (für $D \leq 1$) oder $\sqrt[n]{D}$ (für $D > 1$) die gesuchte untere Schranke. Andere Schranken sind bei L. Bieberbach, Vorlesungen über Algebra (Leipzig und Berlin 1928), S. 14/15 angegeben:

$\frac{N}{|a_n|} + 1 \geq |z| \geq \frac{|a_0|}{N + |a_0|}$ gilt für jede Wurzel von $f(z) = 0$, wobei $N \geq |a_m|$ ($m = 0, 1, \dots, n$). Als Radius des Ausgangskreises wird man etwa das geometrische Mittel aus oberer und unterer Schranke nehmen, da man dann zur Fortsetzung von $f(z)$ über das Kreisringgebiet nach beiden Seiten etwa gleichviel Schritte braucht. Man kann die Ausgangspunkte wieder durch Vektoraddition gewinnen. Zu Beginn wird man die Maschenweite φ nicht zu klein wählen.

Verwendet man zur weiteren Verbesserung der Wurzeln die regula falsi, kann man ebenfalls graphisch vorgehen²⁾: Sind z_1 und z_2 zwei Näherungen für eine Wurzel, bestimmt man zunächst rechnerisch $w_1 = f(z_1)$ und $w_2 = f(z_2)$ und überträgt dann das Dreieck mit den Eckpunkten 0, w_1 und w_2 ähnlich in die z -Ebene. Die $w = 0$ entsprechende Ecke ist dann die neue Näherung z_3 .

3. Beispiel

Als Beispiel soll

$$z^3 + (1 + i)z^2 + (-2,5 + 0,8i)z + 3 + 2i = 0$$

behandelt werden. Aus $|a_3| = 1$, $|a_2| = 1,41$, $|a_1| = 2,62$ und $|a_0| = 3,61$ findet man 7,6 und 0,7 als Schranken für die Absolutbeträge der Wurzeln nach der ersten Methode; 4,6 und 0,5 nach der zweiten Methode. Als

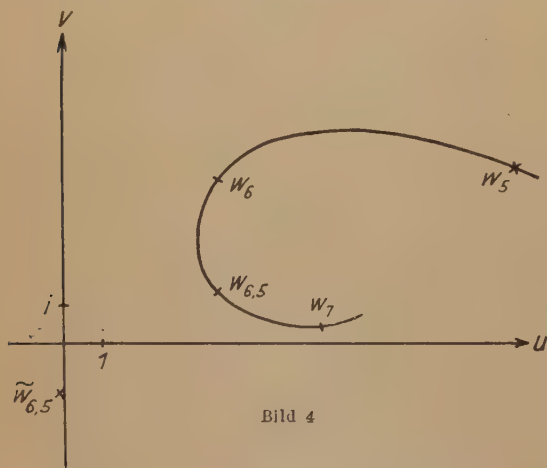


Bild 4

Radius des Ausgangskreises ist $r = 2$ gewählt. Es ist dann $a_3 r^3 = 8$, $|a_2 r^2| = 5,66$, $\arg(a_2 r^2) = 161^\circ 25'$, $|a_1 r| = 5,24$ und $\arg(a_1 r) = 45^\circ$. Man erkennt aus einer überschlägigen Zeichnung, daß das Bild des Kreises $|z| = 2$ sich für Argumente in der Nähe von 180° dem Nullpunkt nähert. In Bild 4 sind deshalb die durch Vektoraaddition gewonnenen Bildpunkte der Punkte $z_6 = 2e^{5i\pi/6}$, $z_6 = 2e^{i\pi}$ und $z_7 = 2e^{7i\pi/6}$ eingezeichnet.

Zwischen w_6 und w_7 hat die Bildkurve eine auf den Nullpunktzielende Ausbuchtung. Es ist deswegen noch der Punkt $w_{6,5}$ als Bild des Punktes $z_{6,5} = 2e^{13i\pi/12}$ eingeschaltet. Mit Hilfe der Punkte w_6 , $w_{6,5}$ und w_7 ist dann das Bild des Punktes $z_{6,5} = 2e^{(13i\pi + 1)/12}$

$= 2,6e^{13i\pi/12}$ näherungsweise wie oben beschrieben konstruiert. Aus seiner Lage zum Nullpunkt kann man ohne weiteres entnehmen, daß $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ mit $r_0 = 2,5$ und $\varphi_0 = 190^\circ$ eine brauchbare Ausgangsnäherung ist ($z_0 = -2,46 - 0,43i$). Durch Verbesserung dieser Näherung findet man den genaueren Wert $z = -2,4592 - 0,5542i$.

Die angegebene Näherungsmethode zur analytischen Fortsetzung läßt sich natürlich auch bei der Bestimmung von Nullstellen anderer analytischer Funktionen verwenden.

Dresden.

K.-H. Bachmann.

Zur Stabilität des Differenzenverfahrens bei der Stabschwingungsgleichung.

Bei der Gleichung für freie Querschwingungen gerader Stäbe konstanten Querschnitts im einfachsten Fall¹⁾

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + K \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \dots \quad (1)$$

(Auslenkung u aus der Ruhelage an der Stelle x zur Zeit y ; K gegebene Konstante) werde ein rechteckiges Gitter mit den Maschenweiten h und l und den Gitterpunkten

$$\left. \begin{aligned} x &= x_j = jh; & y &= y_k = kl \\ (j, k &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (2)$$

zugrundegelegt, und U_{jk} sei ein Näherungswert für $u(x_j, y_k)$. Beim gewöhnlichen Differenzenverfahren ersetzt man (1) durch die Differenzengleichung

$$\left. \begin{aligned} U_{j+2,k} - 4U_{j+1,k} + 6U_{j,k} - 4U_{j-1,k} + U_{j-2,k} \\ + K \frac{U_{j,k+1} - 2U_{j,k} + U_{j,k-1}}{l^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3).$$

Diese Formel wird verwendet, um den Wert $U_{j,k+1}$ auf der Zeile $y = (k+1)l$ auszurechnen, wenn die Werte auf den beiden vorangehenden Zeilen $y = kl$ und $y = (k-1)l$ bereits bestimmt sind. Mit der Abkürzung

$$z = \frac{l^2}{Kh^4} \quad \dots \quad (4)$$

lautet (3)

$$\left. \begin{aligned} U_{j,k+1} &= -U_{j,k-1} - zU_{j+2,k} + 4zU_{j+1,k} \\ &+ (2-6z)U_{j,k} + 4zU_{j-1,k} - zU_{j-2,k}. \end{aligned} \right\} \quad (5).$$

Wählt man $z = 1$, so entsteht

$$\begin{aligned} U_{j,k+1} &= -U_{j,k-1} - U_{j+2,k} + 4U_{j+1,k} \\ &- 4U_{j,k} + 4U_{j-1,k} - U_{j-2,k}. \end{aligned}$$

Diese Formel ist für die praktische Rechnung unbrauchbar, weil kleine Fehler in den U -Werten, z. B. schon die Abrundungsfehler, sich so ungünstig fortpflanzen, daß die dadurch hervorgerufenen Schwankungen die Rechnung ganz überdecken; das Verfahren ist „instabil“. Ein Zahlenbeispiel in dieser Zeitschrift bestätigt diese Erscheinung²⁾. Herr K. Oswatitsch³⁾ hat nun dasselbe Beispiel mit kleinerer Zeitmaschenweite durchgerechnet (und zwar mit dem Wert $z = 1/6$) und dabei stabiles Verhalten beim Differenzenverfahren festgestellt. Es soll daher hier untersucht werden, bis zu welchem (günstigsten) z -Wert das Differenzenverfahren sich stabil verhält. Dies läßt sich nach der Theorie von J. v. Neumann⁴⁾ durchführen, hier aber auch nach einer elementarerer Methode⁵⁾. Dabei legt man allerdings

¹⁾ Vgl. etwa Handbuch der Physik, Bd. VI, Mechanik der elastischen Körper. Berlin 1928 S. 359.

²⁾ L. Collatz: Über das Differenzenverfahren bei Anfangswertproblemen partieller Differentialgleichungen. Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 239–247.

³⁾ Die Rechnung von Herrn K. Oswatitsch gab die Anregung zu der vorliegenden Betrachtung.

⁴⁾ R. P. Eddy: Naval Ordnance Laboratory Memorandum. Bd. 10 (1949), S. 232.

⁵⁾ G. O. Brien, M. Hyman, S. Kaplan: A Study of the Numerical Solutions of Partial Differential Equations. Journal of Mathematics and Physics 29 (1951), 223–251.

²⁾ Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis. Berlin 1950, S. 256.

eine spezielle Art von Anfangsrandwertaufgaben zugrunde. So möge es sich hier etwa um einen beidseitig gelenkig gelagerten Träger endlicher Länge mit den Anfangs- und Randbedingungen handeln:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{(x, 0)} &= f_2(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq a, \\ u(0, y) &= u(a, y) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(0, y)} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{(a, y)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6),$$

wobei $f_1(x)$ und $f_2(x)$ gegebene Funktionen sind. Das Intervall $0, a$ werde in N gleiche Teile der Länge $h = \frac{a}{N}$ geteilt. Auf zwei benachbarten Zeilen, etwa auf

den zu $k = p, k = p + 1$ gehörigen Zeilen, seien die $U_{j, k}$ -Werte mit gewissen Fehlern $\varepsilon_{j, p}$ bzw. $\varepsilon_{j, p+1}$ behaftet, und man fragt, ob die dadurch beim Rechnen nach der Gl. (5) bewirkte Fehlerverteilung $\varepsilon_{j, k}$ für $k \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt oder nicht.

Nun hat Gl. (5) die Partikularlösung

$$U_{j, k} = \sin j\xi \cdot e^{(k-p)\eta} \dots \dots \dots (7)$$

wenn (wie man beim Einsetzen sofort nachrechnet) zwischen ξ und η der Zusammenhang besteht

$$2z(\cos \xi - 1)^2 = 1 - \coth \eta \dots \dots (8).$$

Wählt man für ξ die Werte $\xi = \xi_p = \frac{v\pi}{N}$ und sind $\pm \eta_p$ nach (8) zugehörige Werte von η , so ist auch

$$v_{j, k} = \sum_{p=1}^{N-1} \sin \frac{jv\pi}{N} (A_p e^{(k-p)\eta_p} + B_p e^{-(k-p)\eta_p}) \dots (9)$$

eine Lösung von (5), welche den (6) entsprechenden Differenzen-Randbedingungen

$$\begin{aligned} v_{0, k} &= v_{N, k} = v_{1, k} - 2v_{0, k} + v_{-1, k} = v_{N+1, k} \\ -2v_{N, k} + v_{N-1, k} &= 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

genügt und für $k = p$ und $k = p + 1$ die Werte $\varepsilon_{j, p}$ bzw. $\varepsilon_{j, p+1}$ annimmt, sofern man die noch freien Konstanten A_p und B_p aus dieser Forderung bestimmt. Es ist stets möglich, die A_p und B_p auf diese Weise zu ermitteln; setzt man nämlich

$$\varepsilon_{j, p} = \sum_{v=1}^{N-1} \alpha_v \sin \frac{jv\pi}{N}; \quad \varepsilon_{j, p+1} = \sum_{v=1}^{N-1} \beta_v \sin \frac{jv\pi}{N},$$

wobei sich die α_v, β_v nach den bekannten Formeln der harmonischen Analyse ergeben, so erhält man für die A_p und B_p die Gleichungen

$$A_p + B_p = \alpha_p; \quad A_p e^{\eta_p} + B_p e^{-\eta_p} = \beta_p,$$

aus denen sich A_p und B_p eindeutig berechnen, da $\eta_p \neq 0$ ist (mit $\cos \xi \neq 1$, $z \neq 0$ ist nach (8) auch $\coth \eta \neq 1$ also $\sinh \eta \neq 0$ und damit die Determinante des Gleichungssystems $\neq 0$). Somit ist in (9) $v_{j, k} = \varepsilon_{j, k}$ und $\varepsilon_{j, k}$ bleibt für $k \rightarrow \infty$ bei beliebiger Fehlerverteilung, d. h. bei beliebigen A_p, B_p genau dann beschränkt, wenn

$$|e^{\eta_p}| = 1 \quad \text{für } v = 1, \dots, N-1$$

ist. Die Gleichung $s = 1 - \coth \eta$ hat bei gegebenem reellen s im Streifen $|\Im \eta| \leq \pi$ Lösungen η , die für von 0 bis 2 anwachsendes s auf der imaginären Achse liegen und von 0 bis $\pm i\pi$ wandern, und die für $s > 2$ auf den Geraden $\Im \eta = \pm \pi$ liegen. Für $0 < s \leq 2$ ist dann $|e^\eta| = 1$ und für $s > 2$ wird $|e^\eta| > 1$. Die Stabilitätsforderung verlangt daher

$$2z(\cos \xi_p - 1)^2 \leq 2$$

oder

$$z \leq \frac{1}{\left(\cos \frac{v\pi}{N} - 1 \right)^2} \quad (v = 1, \dots, N-1) \quad (10).$$

Diese Schranke für den z -Wert hängt ein wenig von N ab; man erhält eine einfache, für alle N gültige Aussage, wenn man den Nenner durch seinen Größt-

wert 4 ersetzt; die Stabilität ist daher gesichert für

$$z \leq \frac{1}{4} \quad \text{oder} \quad l \leq \sqrt{K} \frac{h^2}{2} \dots (11).$$

Die Differenzengleichung (5) nimmt dann für $z = \frac{1}{4}$ die Form an

$$\left. \begin{aligned} U_{j, k+1} &= -U_{j, k-1} + \frac{1}{4}(-U_{j+2, k} \\ &+ 4U_{j+1, k} + 2U_{j, k} + 4U_{j-1, k} - U_{j-2, k}) \end{aligned} \right\} \quad (12).$$

Man darf also auch hier die Zeitmaschenweite nicht zu groß wählen.

Hannover.

L. Collatz.

Numerische Werte des Fehlerintegrals für $\sqrt{n\pi}$.

Zu den zahlreichen Anwendungen des Gaußschen Fehlerintegrals

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \dots \dots (1)$$

gehört seit einigen Jahrzehnten auch die numerische Berechnung gewisser Werte von Zetafunktionen, die insbesondere in der Kristallphysik (Berechnung der Gitterenergie periodischer Ionenanordnungen) gebraucht werden. Hierbei ist man zwar nicht an eindeutig bestimmte Werte des Arguments gebunden, jedoch bietet die Verwendung der Werte $x = \sqrt{n\pi}$, wo n eine natürliche Zahl bedeutet, mehrfache Vorteile. In neuerer Zeit wird das Fehlerintegral hierbei mit größerer Genauigkeit benötigt, so daß die allgemeiner zugänglichen Tafeln dieser Funktion nicht ausreichen.

Tabelle 1

n	$F(\sqrt{n\pi})$
1	0,98781 11178 15197 10
2	0,99960 72494 11718
3	0,99998 58555 97311
4	0,99999 94648 35338
5	0,99999 99791 73448
6	0,99999 99991 74578
7	0,99999 99999 66864
8	0,99999 99999 98657
9	0,99999 99999 99945
10	0,99999 99999 99998
≥ 11	1,00000 00000 00000

Für $2 \leq n \leq 7$ beträgt der Fehler möglicherweise bis zu ± 1 Einheit der letzten Stelle.

Daher sollen die Werte im Folgenden mit etwa 14 Dezimalstellen mitgeteilt werden; siehe Tabelle 1, deren Entstehung kurz erläutert werde:

1. Aus (1) folgt durch Integration der Potenzreihe für die Exponentialfunktion die bekannte in der ganzen Ebene konvergente Potenzreihe des Fehlerintegrals

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 5} - \frac{x^7}{3 \cdot 7} \pm \dots \right) \quad (2),$$

die sich zur genaueren Berechnung im allgemeinen nur bei kleineren $|x|$ eignet. Für $x = \sqrt{\pi}$ erhält man:

$$\frac{1}{2} F(\sqrt{\pi}) = 1 - \frac{\pi}{1 \cdot 3} + \frac{\pi^2}{2 \cdot 5} - \frac{\pi^3}{3 \cdot 7} \pm \dots \quad (3).$$

Da die Werte von $\pi^k/k!$ für positive ganzzahlige $k < 16$ mit mindestens 18 Dezimalstellen tabuliert sind¹⁾ und sie für einige weitere k mit normalen Hilfsmitteln berechnet werden können, ergab sich diese Potenzreihe relativ einfach zu

$$F(\sqrt{\pi}) = 0,98781 11178 15197 1028. \pm 4$$

2. Die übrigen Werte von $F(\sqrt{n\pi})$ für ganzzahlige n wurden durch Interpolation aus vorhandenen Tafeln

¹⁾ K. Hayashi, Tafeln der Besselschen, Theta-, Kugel- und anderer Funktionen, Berlin 1930, Tafel IX, 8,3 und 5.

berechnet²⁾. Für $n = 2, 3$ und 4 wurde kubisch, für $n = 5$ und 6 quadratisch interpoliert.

3. Für $n = 7, 8$ und 9 konnte linear interpoliert werden. Dabei wurden die für $n = 8$ und 9 vorhandenen Schwankungen der ersten Differenz im Betrag von je einer Einheit der letzten Stelle (die Differenzen betrugen 14, 13, 14 für $n = 8$ und 1, 1, 0 für $n = 9$), die offenbar eine Folge von Auf- oder Abrundungen darstellen, dazu verwendet, um diese Unsicherheit der letzten Stelle nicht nur auszugleichen, sondern die Fehlergrenze unter den üblichen Wert von $\pm 0,5$ der letzten Stelle herabzudrücken. Voraussetzung hierbei ist, daß bei Erstellung der Tafeln die Auf- und Abrundungen exakt erfolgt sind.

Tabelle 2

x	$F(x)$
5,316	0,99999 99999 99944
5,317	0,99999 99999 99945
5,318	0,99999 99999 99946
5,319	0,99999 99999 99946

Wegen $x_0 = \sqrt{9\pi} = 5,317\,362$ geht man aus von dem in Tabelle 2 wiedergegebenen Auszug aus der Tafel²⁾. In Bild 1 sind die Werte der letzten Stellen eingetragen, wobei die Intervalle der wahren Werte

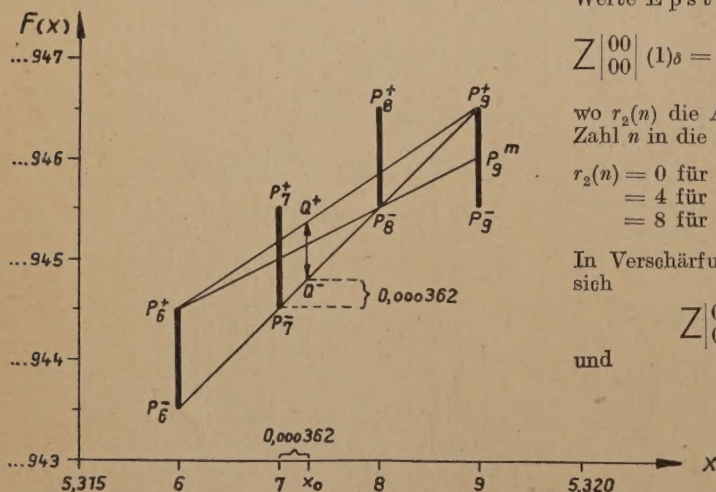


Bild 1

von der Höhe je einer Einheit der 15. Stelle durch einen stärkeren Strich angedeutet sind. (Strecken $P_j^- P_j^+$, $j = 6, 7, 8, 9$). Da die Funktion in diesem Intervall praktisch geradlinig verläuft, muß sie durch eine alle 4 Strecken $P_j^- P_j^+$ schneidende Gerade darstellbar sein. Aus der speziellen Lage dieser 4 Strecken zueinander ersieht man, daß der gesuchte Wert innerhalb des Fünfecks $P_9^+ P_6^- P_8^- P_9^m$ liegen muß (P_9^m sei die Mitte zwischen P_9^- und P_9^+), für $5,317 < x_0 < 5,318$ also in dem Dreieck $P_9^+ P_6^- P_8^-$, so daß $F(x_0)$ in einem Intervall von der Länge $Q-Q^+ = \frac{1}{3}(2 - 0,362) = 0,546$ liegen muß und dem unteren Intervallende Q^- mit

$$F(x_0) \geq (\dots 944,5 + 0,362) \cdot 10^{-15},$$

²⁾ Tables of probability functions, I u. II, Conducted under the sponsorship of the National Bureau of Standards, New York 1941. (15 Dezimalstellen mit Intervallen von 0,001).

also

$$F(\sqrt{9\pi}) = 0,9^{(13)} 4513. \pm 28$$

Dabei bedeutet die Ziffer in Klammern hinter der auf das Komma folgenden 9 die Anzahl der dort vorhandenen Neunen.

Für $n = 8$ vgl. das — schematisierte — Bild 2. Es ergibt sich $F(\sqrt{8\pi}) = 0,9^{(11)} 865\,715. \pm 19$

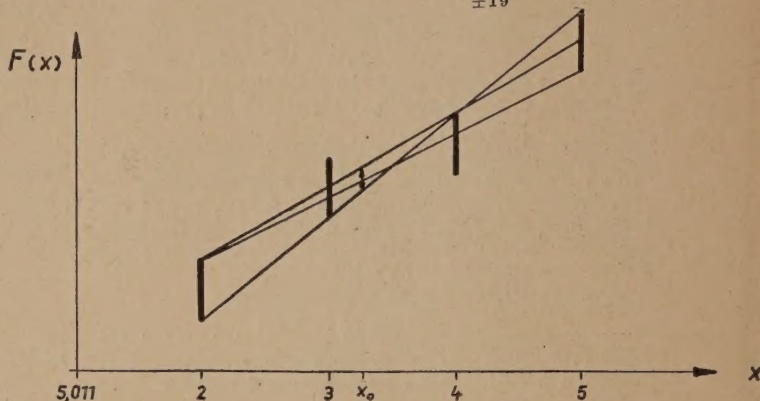


Bild 2

4. Anwendungen. Die angegebenen Werte gestatten nunmehr eine genauere Berechnung gewisser Werte Epstein'scher Zetafunktionen, insbesondere

$$Z_{00}^{00}(1)_\delta = -4 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_2(n)}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \left[1 - F(\sqrt{n\pi}) \right] \quad (4),$$

wo $r_2(n)$ die Anzahl der Zerlegungen der natürlichen Zahl n in die Summe von 2 Quadraten bedeutet, also

$$\begin{aligned} r_2(n) &= 0 \text{ für } n = 3, 6, 7, 11, 12; \\ &= 4 \text{ für } n = 1, 2, 4, 8, 9; \\ &= 8 \text{ für } n = 5, 10. \end{aligned}$$

In Verschärfung einer früheren Berechnung³⁾ ergibt sich

$$Z_{00}^{00}(1)_\delta = -3,90026\,49200\,020 \dots \quad (5)$$

und

$$\left. \begin{aligned} Z_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}^{00}(1)_\delta &= (\sqrt{2} - 1) Z_{00}^{00}(1)_\delta \\ &= -1,61554\,26267\,128 \end{aligned} \right\} \quad (6).$$

Letzteres hat die Bedeutung der alternierenden Summe der reziproken Abstände eines Gitterpunktes in einem quadratischen Gitter von allen übrigen — nach wachsender Entfernung geordnet. — Dieser Wert wird als Madelung-Konstante der alternierenden Netzebene mit großer Genauigkeit benötigt, um einen asymptotischen Ausdruck für die Gitterenergie endlicher, quadratischer Stücke einer solchen Netzebene zu erhalten⁴⁾.

Herr cand. math. H. Eitel, Darmstadt, hat sich freundlicherweise der Mühe unterzogen, mir mit lebenswürdiger Zustimmung von Herrn A. Walther aus einem im dortigen Institut vorhandenen Tabellenwerk²⁾, die von mir benötigten Zahlenwerte mitzuteilen. Herr cand. math. H. Thiele, Berlin, hat mir bei Durchführung der numerischen Berechnung geholfen. Ihnen danke ich auch an dieser Stelle.

Berlin.

Otto Emersleben.

³⁾ O. Emersleben, Dielektrostatische Gitterenergie eines neutralen ebenen, insbesondere alternierenden quadratischen Gitters. Z. Physik 127 (1950), S. 588—609, insbes. S. 593—594.

⁴⁾ Also zur Ausgestaltung der Formel (8) in O. Emersleben, Über die Berechnung der Gitterenergie endlicher Kristallstücke. Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 252—254.

BUCHBESPRECHUNGEN

L. Collatz (Prof. a. d. Techn. Hochschule Hannover), *Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*. (Die Grundlagen der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Bd. LX.) XIII + 458 S. m. 110 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951. Springer-Verlag. Preis geh. 45,— DM, geb. 48,— DM.

Verf. gibt in dem vorliegenden Buch eine umfassende Übersicht über die Methoden der näherungsweise Integration von Differentialgleichungen, wobei er insbesondere die neuerdings auf den verschiedensten Gebieten entwickelten Verfahren einheitlich darstellt. Er berücksichtigt in weitem Umfang insbesondere in den angelsächsischen Ländern in den letzten Jahren entwickelte Methoden, kann aber auch vielfach auf eigene Arbeiten zurückgreifen. Im ersten Kapitel behandelt er Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Er gibt zunächst einfachere Summationsverfahren für Differentialgleichungen erster Ordnung, dann auch für Gleichungen höherer Ordnung das Verfahren von Runge-Kutta und die Verfahren der tabellarischen Integration. Kapitel II bringt Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, und zwar werden zunächst die zum großen Teil vom Verfasser entwickelten verschiedenen Differenzenverfahren, dann die auf den direkten Methoden der Variationsrechnung beruhenden Verfahren und einige andere behandelt. Kapitel III beschäftigt sich mit Anfangs- und Anfangsrandwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen, für die wieder verschiedene Differenzenverfahren in Frage kommen. Hier wird auch auf die Charakteristikentheorie und ihre Verwendung zur numerischen Integration eingegangen. Kapitel IV bringt die Differenzenverfahren, das Ritzsche, das Trefftzsche Verfahren usw. zur Lösung von Randwertproblemen bei partiellen Differentialgleichungen und Kapitel V endlich Methoden zur genäherten Lösung von Integral- und Integro-Differentialgleichungen. Hier geht Verfasser auch kurz auf Funktionalgleichungen ein.

Das Buch zeichnet sich durch umfangreiche Untersuchungen über die Konvergenz der behandelten Verfahren aus. An vielen Stellen findet man sowohl rekursive wie unabhängige Fehlerabschätzungen. Die reiche Erfahrung des Verfassers in der Anwendung der in dem Buch dargebotenen Methoden findet ihren Niederschlag in zahlreichen Hinweisen und Winken für die praktische Durchführung, in Angaben über den Arbeitsaufwand, den die verschiedenen Verfahren zur Erreichung der gleichen Genauigkeit erfordern und vor allem in den zahlreichen instruktiven Beispielen, die zu jeder Methode durchgerechnet werden und die sich nochmals, den in dem betreffenden Abschnitt behandelten Stoff zusammenfassend, am Schluß eines jeden Kapitels nebst Lösungen finden.

Das Buch schmückt ein Bild von Carl Runge. Mit Recht! Sein Inhalt baut vielfach auf Arbeiten Runges auf. Er hätte sicher Freude an dem ausgezeichneten Buch gehabt.

Dresden.

Willers.

Dr.-Ing. Karl Klotter (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe), *Technische Schwingungslehre*. 1. Band: Einfache Schwinger und Schwingungsmeßgeräte. Zweite umgearbeitete und ergänzte Auflage. 399 S. mit 360 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1951. Springer-Verlag.

Die erste Auflage des 1. Bandes des Klotterschen Buches erschien bereits im Jahre 1938 (s. Besprechung Z. angew. Math. Mech. Bd. 18, S. 255). Verf. plant die Herausgabe eines dreibändigen Werkes, sah sich jedoch aus verlagstechnischen Gründen veranlaßt,

noch vor Herausgabe des 2. Bandes eine Neuauflage des 1. Bandes zu bringen. Diese ist wesentlich umfangreicher als die erste Auflage ausgefallen. Insbesondere wurde das Büchlein „Messung mechanischer Schwingungen, Dynamik der Schwingungsmeßgeräte“, Berlin 1943, Springer-Verlag, das Verf. inzwischen als eine Art Ergänzung des 1. Bandes veröffentlicht hatte, in ergänzter Form aufgenommen. Weiterhin ist die Aufnahme eines Kapitels über rheolineare Schwinger bemerkenswert, das sich mit solchen Schwingern befaßt, deren Differentialgleichungen veränderliche Koeffizienten aufweisen (Beispiele: Pendel im Schwerfeld, Pendel und elastischer Schwinger mit erschütterter Drehachse, Druckstab mit pulsierenden Längskräften, Torsionsschwingungen von Kurbelwellen u.a.); die fortschreitende Technik hat insbesondere auf diesem Gebiete eine Fülle von Anregungen gebracht, die zu interessanten Stabilitätsbetrachtungen Veranlassung gegeben haben. Die Fachwelt wird die Aufnahme dieses Kapitels besonders begrüßen. Im übrigen war der Verf. bemüht, hinsichtlich Vollständigkeit und Klarheit verschiedene Verbesserungen anzubringen, so daß nunmehr eine recht geschlossene Darstellung des Schwingers mit einem Freiheitsgrad vorliegt und die Streichung des Wortes „Einführung“ im ursprünglichen Titel des Buches gerechtfertigt erscheint.

Dresden,

H. Neuber.

Edward R. van Driest, *Die linearisierte Theorie der dreidimensionalen kompressiblen Unterschallströmung und die experimentelle Untersuchung von Rotationskörpern in einem geschlossenen Windkanal*. (Mitt. Institut f. Aerodynamik an der E. T. H. Zürich, herausgeg. von Prof. Dr. J. Ackeret, Nr. 16) 30 S. Zürich 1949. Verlag Leemann. Preis: 7,— Fr.

Die Prandtl-Glauertsche Regel gestattet recht bequem und mit guter Annäherung die ebene Strömung um schlanke Körper im Unterschallbereich durch zugeordnete inkompressible Strömungen wiederzugeben. In der vorliegenden Abhandlung wird diese Prandtl-Glauertsche Regel auf rotationssymmetrische Strömungen verallgemeinert, wobei in die Umrechnungsvorschrift, wie schon früher durch B. Göthert festgestellt wurde, neben der Machschen Zahl aber auch der Schlankeitsgrad des Körpers eingeht. Die theoretischen Ergebnisse werden für Rotationshalbkörper experimentell geprüft, unter Berücksichtigung der Kanalkorrekturen, die wesentlich sind. Die gute Bestätigung der Theorie ist bemerkenswert.

Göttingen.

W. Tollmien.

Dr. sc. techn. Ambros P. Speiser, *Entwurf eines elektronischen Rechengerätes unter besonderer Berücksichtigung der Erfordernisse eines minimalen Materialaufwandes bei gegebener mathematischer Leistungsfähigkeit* (Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik an der eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, herausgegeben von Prof. Dr. E. Stiefel), IV + 65 S. in 4 Abb., Zürich 1950.

Es wird ein elektronisch arbeitender, programmgesteuerter digitaler Rechenautomat beschrieben, der etwa 1000 Elektronenröhren und 300 elektromagnetische Relais erfordert. Der Entwurf basiert auf den Erfahrungen, die Verfasser an amerikanischen Rechenautomaten gesammelt hat und berücksichtigt diesen gegenüber die wichtige Forderung nach minimalem Materialaufwand.

Als Speicher für Zahlen und Befehle dient die bewährte Magnetophontrommel, deren Einzelspeicher mit einem Relais-System aufgerufen werden. Das elektronische Rechenwerk für die vier Grundrechnungsarten ist durch die Verwendung des Dezimalsystems charakterisiert, die Ziffernstellen sind in Dualform (Tetraden) nach dem Aiken-System verschlüsselt und werden nacheinander verarbeitet. Die Zahlen- und Befehlsein- und -ausgabe erfolgt unmittelbar mit handelsüblichen Fernschreibappa-

raten. Das Gerät soll zur Addition 0,8, zur Multiplikation 30, zur Division 40 ms benötigen und gehört damit noch zur Klasse der schnellen Rechenautomaten. Das Leistungsvolumen genügt bei 1200 Zahlenspeichern mit einer Suchzeit von 16 ms für jedes mittelgroße mathematische Institut.

Der Entwurf beschränkt sich auf die Diskussion des prinzipiellen Aufbaues der Maschine und bringt keine elektrischen Schaltbilder.

Dresden.

N. Joachim Lehmann.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Arthur Linder (Prof. a. d. Univ. Genf und der ETH. Zürich), Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und Ingenieure (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe Bd. 3). 2. erweiterte Auflage. 238 S. mit 42 Abb. Basel 1951. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 26 Fr., geb. 30 Fr.

P. Finsler (o. Prof. a. d. Univ. Zürich), Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe Bd. 11.) XI + 160 S. Basel 1951. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 12 Fr., geb. 14,80 Fr.

R. von Mises (Prof. a. d. Harvard-Univ.), Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Einführung in die neue Wahrscheinlichkeitslehre und ihre Anwendung. 3. neubearbeitete Auflage. IX + 278 S. Wien 1951. Springer-Verlag. Preis brosch. 18,— DM.

H. Beckert, Bemerkungen über die Verbiegung hyperbolisch gekrümmter Flächenstücke. **H. Salié**, Über Abels Verallgemeinerung der binomischen Formeln. Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Band 98 Heft 4. 22 S. Berlin 1951. Akademie-Verlag.

Dr. Kurt Reidemeister (o. Prof. a. d. Univ. Marburg), Einführung in die kombinatorische Topologie (Die Wissenschaft, herausgeg. von Prof. Dr. Wilhelm Westphal, Band 86). Unveränderter Nachdruck. XII + 209 S. Braunschweig 1951. Friedrich Vieweg & Sohn. Preis geb. 12,— DM.

Dr. A. Ostrowski (o. Prof. a. d. Univ. Basel), Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Band 2: Differentialrechnung auf dem Gebiete mehrerer Variablen. (Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiet der exakten Wissenschaften mathem. Reihe Bd. 5.) 482 S. mit 55 Abb. Basel 1951. Verlag Birkhäuser. Preis brosch. 63,— Schw. Fr., geb. 67,— Schw. Fr.

R. Sauer (Prof. a. d. Techn. Hochschule München). Écoulements des Fluides Compressibles. XVI + 307 S. mit 150 Abb. Paris et Liège 1951. Librairie Polytechnique Ch. Béranger. Preis geb. 3.900 fr.

Dr. L. Vietoris (o. Prof. a. d. Univ. Innsbruck) und **Dr. Gustav Lochs**, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. 416 S. mit 159 Abb. Innsbruck 1951. Universitätsverlag Wagner. Preis geb. 30,— DM.

Colloque de Topologie (Espaces fibrés) Tenu à Liège du 5 au 8 juin 1950, 137 S. Liège, Paris 1951, Georges Thone, Masson & Cie. Preis 175 francs belges, 1.225 francs français.

NACHRICHTEN

Am 2. Oktober 1951 beging Prof. Dr. Ludwig Prandtl sein 50jähriges Professoren-Jubiläum. Schriftleitung und Verlag sprechen dem hervorragenden Wissenschaftler, dem erfolgreichen Forscher zu diesem seltenen Jubiläum die herzlichsten Glückwünsche aus und danken ihm, der diese Zeitschrift mitbegründete, für die Förderung, die er jederzeit der ZaMM zuteil werden ließ und für seine Mitarbeit.

Die nächste Tagung der Gesellschaft für angew. Mathematik und Mechanik wird in der Pfingstwoche 1952 in Braunschweig stattfinden.

München: Prof. Dr. Aumann wurde an die Universität München berufen.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher Sammelnummer: 42 55 71. Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/31/11—12. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft DM 6,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer 245 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik. Satz und Druck: Thüringer Volksverlag, Werk II, Zweigniederlassung Langensalza (57 275 4022) (1) Printed in Germany.